

## PROSES PENALARAN DAN PEMBUKTIAN MATEMATIS PESERTA DIDIK DITINJAU DARI PERBEDAAN KEMAMPUAN SPASIAL

Aris Maulana<sup>1</sup>, Susiswo<sup>2</sup>, Hery Susanto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>S-2 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang, <sup>2</sup>Dosen Universitas Negeri Malang

<sup>1,2</sup> Pascasarjana Universitas Negeri Malang,

[1aris.maulanapq@gmail.com](mailto:aris.maulanapq@gmail.com)

### ABSTRAK

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif yang membahas mengenai proses penalaran dan pembuktian peserta didik yang ditinjau dari perbedaan tingkat kemampuan spasial. Kemampuan penalaran yang dimiliki peserta didik sangat penting dalam membantu peserta didik untuk berfikir secara mendalam mengenai suatu permasalahan matematika baik soal rutin maupun non rutin. Dalam penelitian ini proses penalaran akan diteliti dengan melihat perbedaan kemampuan spasial yang dimiliki peserta didik. Penelitian ini berawal dari diberikannya permasalahan kepada peserta didik secara umum yakni sebanyak 32 peserta didik kelas VIII di MTs TMI Pujon. Kemudian diambil 2 peserta didik dengan kemampuan spasial yang tinggi, 2 peserta didik dengan kemampuan spasial yang sedang dan 2 peserta didik dengan tingkat kemampuan spasial yang rendah. Setelah didapat 6 subjek, kemudian dilakukan pemberian tes penalaran dalam materi persamaan garis lurus yang telah divalidasi oleh beberapa validator. Setelah pemberian soal tes penalaran, hasil pekerjaan peserta didik diidentifikasi dengan indikator penalaran. Proses identifikasi akan dilanjutkan dengan proses wawancara dengan peserta didik untuk mengetahui sejauh mana pembuktian matematis yang dimiliki peserta didik untuk memberikan alasan yang tepat untuk hasil pengerjaan peserta didik. Pada penarikan kesimpulan didapatkan bahwa peserta didik dengan kemampuan spasial yang tinggi akan mempengaruhi proses penalaran dan pembuktian matematis. Yakni peserta didik dengan kemampuan spasial yang tinggi memiliki proses penalaran dan pembuktian yang baik pada saat mengerjakan permasalahan mengenai materi persamaan garis lurus, begitupun dengan peserta didik yang memiliki tingkat kemampuan spasial yang sedang memiliki tingkat penalaran yang sedang pula. Sedangkan pada peserta didik yang memiliki tingkat kemampuan spasial yang rendah tidak terlihat proses penalaran dan pembuktian matematis saat mengerjakan permasalahan tersebut, juga saat melalui proses wawancara.

**Kata Kunci :** Penalaran Matematis, Kemampuan spasial

### Abstract

*This research is a qualitative descriptive study that discusses the process of reasoning and proof of students in terms of differences in the level of spatial ability. The reasoning abilities possessed by students are critical in helping students to think deeply about a mathematical problem, both routine and non-routine. In this study, the reasoning process will be examined by looking at the differences in spatial abilities possessed by students. This study begins with the giving of problems to students in general, as many as 32 students of class VIII in MTs TMI Pujon. They were then taken two students with high spatial ability, two students with moderate spatial ability, and two students with a low level of spatial ability. After getting six subjects, then the reasoning tests were given in the material of straight-line equations that had been validated by several validators. After giving the reasoning test questions, students' work results are identified by reasoning indicators. The identification process will be continued with an interview process with students to find out the extent to which mathematical proofs are owned by students to provide the right reasons for students' work. In drawing conclusions, it is found that students with high spatial ability will influence the process of mathematical reasoning and proof. I.e., students with high spatial ability have good reasoning and proofing processes when working on problems regarding the subject of straight-line equations, as well as students who have a spatial ability level who are having a moderate level of reasoning too. While students who have a low level of spatial ability do not see the process of reasoning and mathematical proofing when working on these problems, also when going through the interview process.*

**Keywords:** *Mathematical Reasoning, Spatial Ability*

## PENDAHULUAN

Ilmu matematika telah diajarkan kepada peserta didik mulai dari jenjang taman kanak-kanak sampai jenjang perguruan tinggi (Hong, 1996: 477). Peserta didik juga dapat menjumpai matematika dalam kehidupan sehari-hari seperti pada kegiatan jual beli, menabung di bank, menghitung penukaran nilai rupiah ke mata uang negara lain, menghitung hasil bahan jadi yang diperoleh ketika memadukan dua mesin atau lebih dengan diketahui bahan baku yang dimasukkan ke dalam mesin, menghitung keuntungan dan kerugian dalam berbisnis, dan lain sebagainya (Salout, dkk, 2013: 1).

Chamundeswari (2014: 25) mengungkapkan bahwa matematika adalah dasar dari semua penemuan dan telah berperan penting dalam membangun peradaban dan menyempurnakan semua ilmu. Chamundeswari juga mengungkapkan bahwa bagi orang awam, matematika merupakan hal mutlak yang sangat diperlukan dalam proses kehidupan. Menurutnya, matematika merupakan ibu dari semua ilmu pengetahuan. Dari beberapa hal tersebut, memperlihatkan seberapa pentingnya matematika dalam kehidupan sehari-hari. Berdasarkan hasil penelitian dari Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) tahun 2009, Indonesia menempati peringkat ke 34 dari 35 negara (Wardono, dkk, 2015: 350). Hal tersebut menunjukkan bahwa penguasaan matematika peserta didik di Indonesia masih rendah.

Menurut NCTM pada tahun 2000, prinsip dan standart matematika sekolah disebutkan ada lima yakni (1) standart pemecahan masalah, (2) standart penalaran dan pembuktian, (3) standart komunikasi matematis, (4) standart koneksi matematis dan (5) standart representasi matematis. Lima standart tersebut memiliki pengaruhnya masing-masing terhadap penguasaan matematika peserta didik. Standart penalaran dan pembuktian berpengaruh pula terhadap penguasaan matematis peserta didik dalam mengerjakan soal matematika.

Kemampuan spasial merupakan proses mental dalam mempersepsi, menyimpan, mengingat, mengkreasi, mengubah, dan mengkomunikasikan bangun ruang. Pada matematika di sekolah kemampuan spasial ini berhubungan dengan materi geometri bangun ruang. Kemampuan spasial sangat dibutuhkan bagi siswa yang bercita-cita seperti arsitek, desain interior, pilot, animator games 3dimensi dan lain sebagainya. Menurut Meir kemampuan spasial terdiri dari kemampuan persepsi, kemampuan visualisasi, kemampuan rotasi, kemampuan relasi, dan kemampuan orientasi.

Dalam beberapa pembahasan istilah berfikir logis (*logical thinking*) sering kali dipertukarkan dengan istilah bernalar logis (*logical reasoning*), karena keduanya memuat beberapa kegiatan yang serupa. Sesungguhnya, istilah berfikir logis mempunyai cakupan yang lebih luas dari bernalar logis. Capie dan Tobin (1980, dalam Sumarmo, 1987) mengukur kemampuan berfikir logis berdasarkan teori perkembangan mental dari Piaget melalui Test of Logical Thinking (TOLT) yang meliputi lima komponen yaitu: mengontrol variabel (*controlling variable*), penalaran proporsional (*proportional reasoning*), penalaran probabilistik (*probalistics reasoning*), penalaran korelasional (*correlational reasoning*), dan penalaran kombinatorik (*combinatorial thinking*). Pengertian berpikir logis juga dikemukakan oleh beberapa pakar lainnya (Albrecht, 1984, Minderovic, 2001, loveureyes, 2008, Sonias, 2011, Strydom, 2000, Suryasumantri, 1996, dalam Aminah, 2011). Berpikir logis atau berpikir runtun didefinisikan sebagai: proses mencapai kesimpulan menggunakan penalaran secara konsisten (Albrecht, 1984), berpikir sebab akibat (Strydom, 2000), berpikir menurut pola tertentu atau aturan inferensi logis atau prinsip-prinsip logika untuk memperoleh kesimpulan (Suryasumantri, 1996, Minderovic, 2001, Sponias, 2011), dan berpikir yang meliputi induksi, deduksi, analisis, dan sintesis (loveureyes, 2008).

Keraf, (1982), Shurter and Pierce (Sumarmo, 1987) mendefinisikan istilah penalaran serupa dengan pengertian penalaran proposisional atau penalaran logis yaitu sebagai proses berfikir yang memuat kegiatan menarik kesimpulan berdasarkan data dan peristiwa yang ada. Sumarmo (2005) merinci indikator penalaran matematik sebagai berikut: a) menarik kesimpulan analogi, generalisasi, dan menyusun konjektur, b) menarik kesimpulan logis berdasarkan aturan inferensi, memeriksa validitas argumen, dan menyusun argumen yang valid, c) menyusun pembuktian langsung, tak langsung, dan dengan induksi matematik. Berpikir logis memuat kegiatan penalaran logis dan kegiatan matematika lainnya yaitu: pemahaman, koneksi, komunikasi, dan penyelesaian masalah secara logis. Analisis tersebut melukiskan bahwa berpikir logis memiliki cakupan yang lebih luas dari pada penalaran logis.

Dari beberapa penjelasan tersebut terlihat kemampuan spasial dan kemampuan logis peserta didik juga ikut andil dalam penguasaan matematika. Oleh karena itu peneliti akan melaksanakan penelitian dengan judul "**Proses Penalaran dalam Pembuktian Matematis Peserta Didik Ditinjau dari Perbedaan Kemampuan Spasial**".

## METODE

Dalam penelitian ini, pendekatan yang digunakan merupakan pendekatan kualitatif. Peneliti menggunakan pendekatan kualitatif pada penelitian ini karena sesuai dengan topik penelitian. Pendekatan kualitatif yakni pendekatan yang penelitiannya dilakukan pada objek yang alamiah yaitu objek yang berkembang apa adanya, tidak dimanipulasi oleh peneliti dan kehadiran peneliti tidak mempengaruhi dinamika tersebut. Penelitian kualitatif mempunyai dua tujuan utama yaitu: (1) menggambarkan dan mengungkap (2) menggambarkan dan menjelaskan. Kedua tujuan tersebut juga sama dengan penelitian yang sedang dilakukan oleh peneliti pada penelitian ini. Pendekatan kualitatif ini digunakan peneliti untuk melihat perbedaan kemampuan spasial peserta didik.

Jenis penelitian yang digunakan merupakan penelitian deskriptif yakni suatu penelitian untuk meneliti status kelompok manusia, suatu objek, suatu set kondisi, suatu sistem pemikiran atau suatu kelas peristiwa pada masa sekarang. Pada penelitian ini yang akan dideskripsikan adalah proses dari penalaran dan pembuktian matematis peserta didik. Sehingga penelitian deskriptif kualitatif ini dimaksudkan untuk mendeskripsikan bentuk penalaran dan pembuktian matematis peserta didik yang ditinjau dari kemampuan spasial.

Berikut adalah indikator kemampuan spasial berdasarkan pendapat Maier (1996) (1) Spatial Perception, (2) Spatial Visualitation, (3) Mental rotation, (4) Spatial Relation, (5) Spatial Orientation. Berikut table indicator kemmpuan spasial.

Tabel 1. Indikator kemampuan spasial berdasarkan pendapat Maier (1996)

Aspek	Indikator
Spatial Perception	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Peserta didik diberikan beberapa gambar mengenai suatu garis, dua garis, dan lebih dari dua garis.</li> <li>2. Peserta didik menentukan hubungan antara garis dengan bidang horizontal dan vertical.</li> <li>3. Peserta didik menentukan hubungan antar garis dengan garis yang lainnya</li> </ol>
Spatial Visualitation	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Peserta didik menentukan garis yang sejajar</li> <li>2. Peserta didik menentukan garis yang tegak lurus</li> </ol>

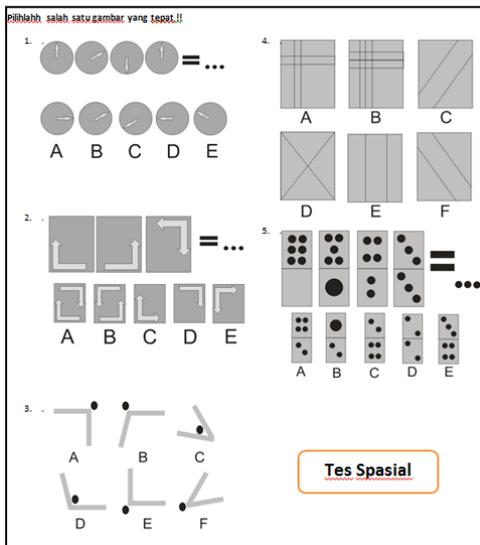
Mental rotation	1. Peserta didik diberikan beberapa garis dengan sudut pandang yang berbeda	diliat dari berbagai sudut
Spatial Relation	1. Peserta didik menentukan hubungan yang sama	didik yang sama
Spatial Orientation	1. Siswa menggambar kenampakan 2 garis dari berbagai sudut, 2. garis yang sejajar dan tegak lurus	didik disuruh menggambar 2 garis dari berbagai sudut, dan tegak lurus

Tabel 2. Indikator dari materi Persamaan aris lurus

KD	Indikator
3.4 Menganalisis fungsi linear (sebagai persamaan garis lurus) dan menginterpretasikan grafiknya yang dihubungkan dengan masalah kontekstual.	3.4.1 Menciptakan suatu persamaan aris lurus baru yang diketahui dari ambar yan teak lurus dan sejajar yang merupakan persamaan garis lurus.

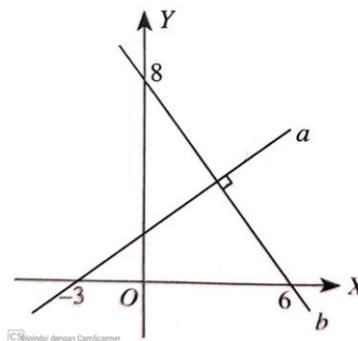
Berikut adalah instrumen yang akan digunakan untuk menguji tingkat kemampuan spasial peserta didik:

Gambar 1 : Soal tipe gambar untuk menguji kemampuan spasial peserta didik



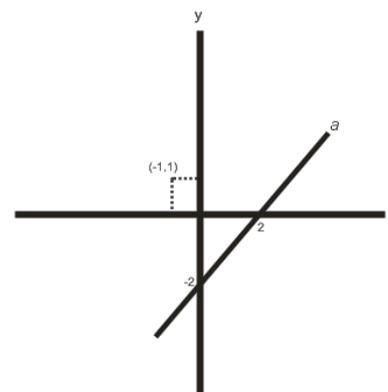
Materi yang digunakan di dalam penelitian ini adalah materi geometri aljabar yakni persamaan garis lurus. Berikut identifikasi dari materi Persamaan Garis Lurus.

Perhatikan Gambar 2 Berikut!



Tentukan Persamaan garis  $a$ !

Perhatikan gambar 3 Berikut!



Tentukan persamaan garis yang sejajar garis  $a$  dan melewati titik  $M(-1,1)$ !

Proses penalaran dan pembuktian matematis peserta didik memiliki indikator untuk mengetahui sejauh mana tingkat kemampuan penalaran peserta didik. Berikut penjabarannya.

Tabel 3. Indikator tingkat kemampuan penalaran peserta didik

Aspek	Indikator
Menyajikan pernyataan matematika secara lisan, tertulis, gambar, dan grafik	Peserta didik mampu merubah permasalahan menggunakan bahasanya sendiri yang relevan dan dapat diterima.
Melakukan manipulasi matematika	Menghubungkan permasalahan dengan materi yang pernah dipelajari dengan menuliskan informasi yang tersirat seperti ciri gradien garis yang saling sejajar ataupun saling tegak lurus
Menyusun bukti, memberikan alasan atau bukti teradap beberapa solusi	Menuliskan beberapa solusi atau alternative permasalahan. Kemudian menggunakannya untuk mengerjakan (rumus persamaan garis lurus)
Menarik kesimpulan dari pertanyaan	Menuliskan kesimpulan pada setiap pengerjaannya
Memeriksa kesesuaian argumen	Terlihat pada saat wawancara.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Setelah pemberian tes tertulis untuk mengetahui tingkat penetaan spasial peserta didik, peneliti memilih jawaban peserta didik sesuai dengan prosedur pemilihan subjek. Dari prosedur tersebut, didapatkan enam peserta didik yang terpilih menjadi subjek penelitian. Dua subjek tersebut terdiri dari subjek satu (S1) dan subjek dua (S2) yang memiliki tingkat kemampuan spasial yang tinggi, S3 dan S4 adalah peserta didik dengan kemampuan spasial sedang serta S5 dan S6 adalah peserta didik dengan tingkat kemampuan spasial yang rendah. Dari enam subjek penelitian yang terpilih, kemudian dianalisis bentuk-bentuk proses pengerjaan yang dilakukan oleh peserta didik dalam mengerjakan soal tes dengan materi persamaan garis lurus. Selanjutnya, untuk memperoleh data yang valid, peneliti melakukan wawancara kepada kedua subjek penelitian tersebut.

Instrumen wawancara menggunakan prosedur yang telah divalidasi salah satu dosen jurusan matematika Universitas Negeri Malang dan salah satu guru mata pelajaran matematika di suatu Sekolah Menengah Atas di Kota Malang, sehingga layak digunakan pada proses wawancara. Hasil tes dan wawancara tersebut digunakan sebagai acuan untuk mengetahui lebih lanjut pada tahap apa peserta didik melakukan proses penalaran dan pembuktian. Wawancara dilakukan satu per satu kepada keenam subjek penelitian. Hal ini dimaksudkan agar benar-benar mengetahui proses yang peserta didik lakukan sesuai jawaban yang diberikan berdasarkan penalaran dan pembuktian.

Analisis kesalahan yang pertama, dilakukan pada hasil pengerjaan soal tes subjek ke-1 (S1). S1 mengerjakan ketiga soal tes dengan lengkap dan melakukan kesalahan dalam mencari penyelesaiannya sehingga tidak diperoleh jawaban akhir yang diinginkan soal. Materi

persamaan garis lurus telah dipelajari oleh peserta didik kelas VIII pada semester ganjil, tetapi peserta didik kelas VIII masih

melakukan kesalahan dalam mencari penyelesaiannya

## SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil pengujian didapatkan bahwa peserta didik dengan kemampuan spasial yang tinggi akan mempengaruhi proses penalaran dan pembuktian matematis. Yakni peserta didik dengan kemampuan spasial yang tinggi memiliki proses penalaran dan pembuktian yang baik pada saat mengerjakan permasalahan mengenai materi persamaan garis lurus, begitupun dengan peserta didik yang memiliki tingkat kemampuan spasial yang sedang memiliki tingkat penalaran yang sedang pula. Sedangkan pada peserta didik yang memiliki tingkat kemampuan spasial yang rendah tidak terlihat proses penalaran dan pembuktian matematis saat mengerjakan permasalahan tersebut, juga saat melalui proses wawancara.

Kepada guru, disarankan untuk mencoba mengasah kemampuan peserta didiknya dengan soal-soal spasial sehingga siswa bisa meningkatkan kemampuan spasialnya, sehingga nantinya juga akan berdampak baik meningkatkan proses bernalar dan pembuktian secara matematis.

## DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, Thontowi. 1993. *Psikologi Pendidikan*. Bandung: Angkasa.

Anton, H. & Rorres, C. 2005. *Elementary Linear Algebra*. Ninth Edition. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc

Bartle, G. & Donald, R.S. 2011. *Introduction to Real Analysis Fourth Edition*. United States of America: Hamilton Printing Company.

Boaler, J.O. 2013. *Ability and Mathematics: The Mindset Revolution That is*

*Reshaping Education*. FORUM, 55 (1): 143-152.

Brodie, K. 2010. *Teaching Mathematical Reasoning In Secondary Schools*. New York: Springer.

Chamundeswari, S. 2014. *Conceptual Errors Encountered in Mathematical Operations in Algebra among Students at the Secondary Level*. *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, 1 (8): 24-38.

Cho, K., Hong, S.Y., Math, R. K., Lee, J., Kambirada, D.M., Kim, J., Islam, S, MA, Yun, M.G., Cho J.J., Lim W.J. 2008. Bitransformation of Phenolics (Isoflavones, Flavanols and Phenolic foods) During The Fermentation Of cheonggukjang by *Bacillus Pumilus* hyl. *Food Chemistry* Doi : 10.1016/J. Foodchem. 2008.09.056. www.chemical-info.com

Herold, J.F. 2014. *A Cognitif Analysis of Student's Activity: An Example in Mathematics*. *Australian Journal of Teacher Education*, 39 (1): 137-158

Mohammed, M.S. & Hussein, F.A. 2015. *Grammatical Error Analysis of Iraqi Postgraduate Student's Academic Writing: The Case of Iraqi Students in UKM*. *International Journal of Education and Research*, 3 (6): 283-294.

Moleong, L.J. 2010. *Metodologi Penelitian Kualitatif Edisi Revisi*. Bandung: PT.Remaja Rosdakarya Bandung

Prakitipong, N. & Satoshi, N. 2006. *Analysis of Mathematics Performance of Grade Five*

- Students in Thailand Using Newman Procedure*. Journal of International Cooperation in Education, 9 (1): 111-122
- Suyitno, A. & Hardi, S. 2015. *Learning Therapy for Students in Mathematic Communication Correctly Based on application of Newman Procedur (A Case of Indonesian Student)*. International Journal of Education and Research, 3 (1): 529-538.
- Wardono, Waluya. B., Kartono, Sukestiyarno, & Mariani, S. 2015. *The Realistic Scientific Humanist Learning With Character Education To Improve Mathematics Literacy Based on PISA*. International Journal of Education and Research, 3 (1): 350-362.
- White, A. L. 2005. *Active Mathematics in Classrooms: Findong Out Why Children make Mistakes-And Then Doing Something to Help Them*. Square One, 15 (4): 15-19.
- Tirtarahardja, Umar. 2012. *Pengantar Pendidikan*. Rineka Cipta.
- BSNP (2013). *Panduan Penyusunan Kurikulum K13 Jenjang Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Depdiknas
- Butler, F. M., Miller, S. P., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). *Fraction instruction for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences*. Learning Disabilities Research & Practice, 18(2), 99–111.
- Karakirik, Erol. (2016). *Developing Virtual Mathematics Manipulatives: The SAMAP Project*
- NCTM. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Virginia.
- McNeil, N., & Jarvin, L. (2017). *When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate*. Theory into Practice, 46(4), 309–316.
- Muhsetyo, dkk. (2007). *Pembelajaran Matematika SD*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Slavin, Robert E. (2005). *Cooperative Learning: theory, research and practice*. London: Allymand Bacon.
- Permendikbud. 2016. *Peraturan Menteri Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia NO. 22 tahun 2016 Tentang Standart Proses Pendidikan Dasar dan Pendidikan Menengah*
- Sulfasyah ; Haig, Y; Pugh, B. C. 2016. *Indonesian teacher's Implementation of New Curriculum Innitiatives in Relaiion to Teacing Writing in Lower Primary School*. International Journal of EducationMacrotink Institute. 2013. Vol 5 No. 4, p. 48-60
- Van de Walle, J.A., Karp, K.S., & BayWilliams, J.M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally (7th Ed.)*. Boston: Pearson Education, Inc.