KONSTRUKSI BARISAN HITUNG SERAGAM SEIMBANG BERBASIS BARISAN TRANSISI KODE GRAY

N. D. Sintiari, I. N. Suparta, D. Waluyo
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Pendidikan Ganesha
e-mail: niluhdewisintiari@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan konstruksi barisan hitung seragam seimbang $\varphi(n,t)$ untuk beberapa pasangan terurut (n,t) dimana faktor persekutuan terbesar dari n dan t, dilambangkan dengan fpb(n,t) lebih dari 1. Barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ adalah barisan hitung n-bit dimana banyaknya perubahan bit diantara sebarang dua katakode berurutan adalah t. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kepustakaan, dengan cara mencermati dan menelaah pengetahuan dalam berbagai sumber pustaka yang menunjang penelitian ini. Dalam hal ini juga digunakan kerja laboratorium dengan menggunakan perangkat lunak *Excel*. Untuk mencari konstruksi barisan hitung seragam, langkah pertama adalah menentukan matriks sirkulan biner nonsingular. Langkah kedua adalah mentransformasi barisan transisi kode Gray n-bit menjadi barisan transisi dari barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ dengan menggunakan matriks sirkulan biner nonsingular. Langkah ketiga adalah menganalisis distribusi barisan transisi dari $\varphi(n,t)$ apakah dapat menghasilkan barisan hitung seragam seimbang. Hasil penelitian ini adalah beberapa konstruksi barisan hitung seragam yang memiliki sifat-sifat tertentu. Beberapa konstruksi tersebut merupakan barisan hitung seragam seimbang.

Kata-kata kunci: kode Gray, matriks sirkulan biner, barisan hitung seragam, barisan hitung seragam seimbang

ABSTRACT

This research aimed to find some constructions of balanced uniform counting sequence $\varphi(n,t)$ *for some ordered pairs* (n,t) *where the greatest common divisor of* n *and* t*, denoted by* gcd(n,t) *is greater than 1. A uniform counting sequence* $\varphi(n,t)$ *is an n-bit counting sequence where the number of bit changes between any two successive codewords in the sequence is equal to t. The method used in this research was literature review by observing and analyzing the content of various literatures which support the current research. It also used laboratory work by using software Excel. In order to construct a uniform counting sequence, the first step is determining the binary nonsingular circulant matrices. The second step is transforming the transition sequence of n-bit Gray code into transition sequence of uniform counting sequence* $\varphi(n,t)$ *by using the binary nonsingular circulant matrix. The third step is analyzing the transition count distribution of* $\varphi(n,t)$ *whether it possible to build balanced uniform counting sequence. The results of* *the research were constructions of uniform counting sequences that have certain properties. Some of these constructions are balanced uniform counting sequences.*

Keywords: *Gray code, binary circulant matrices, uniform counting sequence, balanced uniform counting sequence*

PENDAHULUAN

Barisan hitung (*counting sequence*) yang dilambangkan dengan $\varphi(n)$ termasuk dalam kode terurut, dan banyak diaplikasikan pada logika sirkuit (Suparta, 2006). Jenis barisan hitung dibedakan berdasarkan beberapa hal, antara lain jarak Hamming antar katakode berurutan dan distribusi penghitung transisinya.

Jarak Hamming adalah banyaknya bit berbeda dari dua buah katakode pada suatu barisan hitung pada setiap posisi yang berseuaian. Himpunan bilangan yang menyatakan posisi dari perubahan bit pada dua katakode berurutan disebut **transisi**. Setiap elemen transisi dinamakan **bilangan transisi**. Transisi dari setiap dua buah katakode berurutan pada suatu barisan hitung dari katakode pertama hingga katakode ke 2^n dinyatakan dalam sebuah **barisan transisi**. Barisan transisi dari barisan hitung $\varphi(n)$ dituliskan sebagai

$$\overline{S}_{\varphi(n)} := s_1, s_2, ..., s_{2^n}$$

Dalam hal ini, s_i adalah transisi dari katakode ke $(i–1)$ ke katakode ke $i = 1,2,\dots,2^n - 1$, dan s_{2^n} adalah transisi dari katakode ke 2^n ke katakode pertama.

Perhitungan transisisi bit ke-i untuk $i = 1,2,\dots,n$ dari barisan hitung $\varphi(n)$, yang dinotasikan dengan $TC_{\varphi(n)}(i)$ adalah banyaknya perubahan bit yang terjadi pada posisi bit ke-i pada barisan hitung $\varphi(n)$. Penghitung transisi bit ke-i tidak lain adalah banyaknya kemunculan bilangan transisi i di $\overline{S}_{\varphi(n)}$. Distribusi dari penghitung transisi barisan hitung $\varphi(n)$ yang berbentuk:

$$TC_{\varphi(n)} = (TC_{\varphi(n)}(1), TC_{\varphi(n)}(2), ..., TC_{\varphi(n)}(n))$$

disebut distribusi penghitung transisi dari $\varphi(n)$. Jika $\forall\, i,j \in \{1, 2, ..., n\}$ terpenuhi

$$|TC_{\varphi(n)}(i) - TC_{\varphi(n)}(j)| \leq 2,$$

barisan hitung $\varphi(n)$ disebut **seimbang** (*balanced*), jika terpenuhi

$$|TC_{\varphi(n)}(i) - TC_{\varphi(n)}(j)| = 0,$$

barisan hitung $\varphi(n)$ disebut **seimbang total** (*totally balanced*), dan jika terpenuhi

$$|TC_{\varphi(n)}(i) - TC_{\varphi(n)}(j)| \leq 4,$$

barisan hitung $\varphi(n)$ disebut **hampir seimbang** (*nearly balanced*). Penghitung transisi dari setiap posisi bit pada suatu barisan hitung merupakan bilangan genap.

Salah satu jenis barisan hitung yang paling terkenal adalah **kode Gray biner** (*binary Gray code*), yaitu barisan hitung dengan sifat bahwa jarak Hamming dari dua buah katakode yang berurutan sama dengan satu. Kode Gray biner (dilambangkan dengan $G(n)$) memiliki berbagai aplikasi dalam meminimalisasi kesalahan (*error*) pada proses transmisi data dalam bentuk signal analog, database, dan juga dalam penyelesaian *puzzle*.

Barisan hitung seragam (*uniform counting sequence*) adalah barisan hitung dimana jarak Hamming dari setiap dua buah katakode berurutan adalah konstan. Sebuah barisan hitung seragam yang sekaligus seimbang disebut **barisan hitung seragam seimbang**

(*balanced uniform counting sequence*). Barisan ini dibutuhkan dalam merancang percobaan atau merancang dan menguji sirkuit-sirkuit listrik dan sistem informasi. Sebuah barisan hitung seragam dengan panjang *n* dan jarak Hamming antar dua katakode berurutannya sama dengan *t* dinotasikan dengan $\varphi(n,t)$. Untuk efisiensi, pada tulisan ini himpunan $\{0,1,2,\dots,n\}; n \in \mathbb{N}$ dinotasikan dengan $[n]$ sementara $\{1,2,\dots,n\}; n \in \mathbb{N}$ dinotasikan dengan $[n]^*$.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menemukan konstruksi barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ yang dapat menghasilkan barisan hitung seragam seimbang atau hampir seimbang untuk suatu pasangan terurut (n,t). Jika $t = 1$, maka $\varphi(n,1)$ merupakan kode Gray biner. Dalam Suparta (2006) telah dibuktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif $n > 1$, selalu terdapat kode Gray seimbang $\mathrm{G}(n)$. Beberapa barisan hitung seragam seimbang juga dapat dikonstruksi dari kode Gray seimbang.

Robinson (1981) memperkenalkan konstruksi barisan hitung seragam dengan basis kode linier. Namun keseimbangan barisan yang dihasilkan tidak mudah dianalisis. Suparta (2006) juga memperkenalkan beberapa macam konstruksi, salah satunya adalah barisan hitung $\varphi(n,t);\ n,t \in \mathbb{N},\ n > t,\ \mathrm{fpb}(n,t) = 1$.

Konstruksi ini dapat menghasilkan barisan hitung seragam seimbang untuk setiap pasangan bilangan bulat positif (n,t) yang sesuai dengan $\mathrm{fpb}(n,t) = 1$. Namun saat ini belum ditemukan konstruksi untuk menghasilkan barisan hitung seragam seimbang $\varphi(n,t)$ dengan $\mathrm{fpb}(n,t) > 1$. Berlandasan pada hal tersebut, penelitian ini difokuskan pada konstruksi barisan hitung seragam seimbang untuk membentuk barisan hitung seragam seimbang $\varphi(n,t)$ dengan $\mathrm{fpb}(n,t) > 1$. Dalam hal ini, kode Gray yang digunakan pada konstruksi disebut sebagai **kode basis**.

Dalam penelitian ini, barisan hitung seragam seimbang dikonstruksi dengan menggunakan **matriks sirkulan biner nonsingular**, yakni matriks sirkulan dengan entri-entrinya elemen {0,1} yang memiliki determinan 1. Matriks sirkulan banyak diaplikasikan dalam *signal processing*, teori pengkodean, *image processing*, *digital image disposal*, *self regress*, dan desain (Geller, 2004). Matriks sirkulan biner $n \times n$ berbentuk:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n & \alpha_1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Dalam hal ini, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathrm{GF}(2)$. Barisan terurut $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ disebut generator matriks sirkulan (1). Matriks (1) dengan *t* entri 1 pada generatornya dilambangkan dengan $\mathbf{A}_{(n,t)}$.

Matriks sirkulan biner nonsingular dapat digunakan untuk mengkonstruksi barisan hitung seragam sebab kombinasi linier dari vektor-vektor baris $\mathbf{A}_{(n,t)}$ dapat menghasilkan 2^n kata biner *n*-bit yang membentuk barisan hitung seragam.

Lemma 1.
Jika $\mathbf{A}_{(n,t)}$ adalah matriks sirkulan biner nonsingular, maka kombinasi linier dari vektor-vektor baris $\mathbf{A}_{(n,t)}$ menghasilkan 2^n kata biner *n*-bit.

Bukti.
Notasikan vektor baris matriks $\mathbf{A}_{(n,t)}$ sebagai kata biner dengan panjang n, yaitu $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$. Karena $\mathbf{A}_{(n,t)}$ nonsingular, himpunan $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n\}$ merupakan basis bagi ruang $\mathrm{GF}(2)^n$. Karena ruang $\mathrm{GF}(2)^n$ berdimensi n, maka kombinasi linier dari $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n\}$ menghasilkan 2^n kata biner pada $\mathrm{GF}(2)^n$.
■

Untuk menghasilkan barisan transisi dari barisan hitung seimbang $\varphi(n,t)$, barisan transisi kode Gray $\mathrm{G}(n)$ dipetakan berdasarkan matriks $\mathbf{A}_{(n,t)}$. Barisan hitung seragam yang dihasilkan dari pemetaan tersebut selanjutnya dianalisis keseimbangannya.

Suparta (2006) mengkonstruksi barisan hitung seragam seimbang φ(*n*,*t*), untuk fpb(*n*,*t*) = 1 berdasarkan kode Gray biner seimbang, dengan mempermutasikan distribusi penghitung transisinya menjadi **distribusi reguler**. Dalam penelitian ini, teori tentang distribusi reguler juga diaplikasikan untuk membentuk barisan hitung seragam seimbang.

Distribusi dari dua bilangan bulat positif a dan b adalah sebuah permutasi siklis dari dua bilangan bulat positif a dan b, dan dinotasikan dengan $\mathcal{D}$. Suatu blok-*t* Γ dalam distribusi $\mathcal{D}$ adalah susunan t bilangan berurutan di $\mathcal{D}$, dengan $t \leq \mathcal{D}$. Karena $\mathcal{D}$ adalah permutasi siklis, terdapat $(k_a + k_b)$ buah blok-*t* berbeda yang masing-masing dimulai dari elemen-elemen berbeda di $\mathcal{D}$. Sebuah distribusi $\mathcal{D}$ adalah dari bilangan a dan b disebut distribusi reguler jika untuk sebarang dua blok-*t*, selisih dari banyaknya a (demikian pula banyaknya *b*) dalam dua blok tersebut adalah 0 atau 1, untuk suatu $t\,; 1 \leq t \leq |\mathcal{D}|$. Dalam Suparta (2006) telah ditunjukkan bahwa sebarang distribusi $\mathcal{D}$ dapat disusun sedemikian rupa sehingga menjadi distribusi reguler. Jika distribusi reguler $\mathcal{D}$ memenuhi $|b-a| = 2$, maka $\left|\sum \Gamma_i - \sum \Gamma_j\right| \leq 2$, dimana $\sum \Gamma_i$ menyatakan penjumlahan bilangan pada blok-*t* Γ_i.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kepustakaan. Metode kepustakaan adalah deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam berbagai sumber pustaka untuk menunjang penelitian. Pustaka yang relevan dengan penelitian ini antara lain: Aljabar Linier, Aljabar Abstrak, dan Teori Pengkodean (terutama tentang kode Gray dan barisan hitung). Selain itu, dalam penelitian juga digunakan metode kerja laboratorium, dengan menggunakan *software Excel*.

Program *Excel* digunakan untuk mengamati pola generator matriks sirkulan biner yang menghasilkan determinan 1. Dari pola yang ditemukan, dirumuskan konjektur (dugaan), yang selanjutnya dibuktikan kebenarannya secara formal. Dalam penelitian ini, determinan matriks sirkulan dicari dengan metode Gauss, yaitu dengan mereduksi matriks menjadi matriks segitiga.

Konjektur yang terbukti benar dirumuskan dalam bentuk teorema. Matriks sirkulan biner nonsingular tersebut digunakan untuk mentransformasi barisan transisi kode Gray menjadi barisan transisi barisan hitung seragam berdasarkan pemetaan yang telah dirumuskan sebelumnya, kemudian dianalisis keseimbangannya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mentransformasi barisan transisi kode Gray menjadi barisan transisi dari barisan hitung seragam, dirumuskan pemetaan berdasarkan suatu matriks sirkulan biner nonsingular. Pada penjelasan berikutnya, barisan transisi kode Gray dilambangkan dengan $\bar{S}_{G(n)}$ dan barisan transisi dari barisan hitung seragam dilambangkan dengan $\bar{S}_{\varphi(n,t)}$.

Definisi 1

Misal terdapat himpunan $\{1,2,\dots,n\}$. Sebuah *t–subset* dari $\{1,2,\dots,n\}$ didefinisikan sebagai himpunan bagian dari $\{1,2,\dots,n\}$ yang memiliki tepat *t* elemen, dan fungsi

$$\pi_{(n,t)}:\{1,2,\dots n\}\to \mathrm{T}$$

adalah fungsi yang memetakan $\{1,2,\dots,n\}$ ke himpunan T, yaitu himpunan yang elemennya adalah *t–subset* dari $\{1,2,\dots,n\}$.

Fungsi $\pi_{(n,t)}$ akan digunakan untuk mentransformasi $\bar{S}_{G(n)}$ menjadi $\bar{S}_{\varphi(n,t)}$ berdasarkan suatu matriks sirkulan biner nonsingular. Misal $\bar{S}_{G(n)} := s_1, s_2, \dots, s_{2^n}$ dan $\{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{it}\}$dengan $1 \le s_{i1} < s_{i2} < \cdots < s_{it} \le n$ adalah himpunan kolom yang memuat entri 1 pada baris ke-s_i matriks nonsingular $\mathbf{A}_{(n,t)}$. Pemetaan $\pi_{(n,t)}$ yang memetakan setiap elemen $\bar{S}_{G(n)}$ menghasilkan barisan transisi $\varphi(n,t)$ sebagai berikut.

$\bar{S}_{\varphi(n,t)} = \pi_{(n,t)}(s_1), \pi_{(n,t)}(s_2), \dots, \pi_{(n,t)}(s_{2^n})$

Hal ini akan dibuktikan pada teorema berikut.

Teorema 2

Barisan $\bar{S}_{\varphi(n,t)} = \pi_{(n,t)}(s_1), \pi_{(n,t)}(s_2), \dots, \pi_{(n,t)}(s_{2^n})$ adalah barisan transisi dari barisan hitung seragam $\varphi(n,t) = \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{2^n-1}$ dimana $\mathbf{y}_i := \sum_{k\in O(\bar{S}_i)} \mathbf{r}_k$, untuk $\forall i \in [2^n-1]$, dan $\mathbf{y}_0 = \underbrace{00\dots0}_{n-\text{bit}}$.

Bukti

Sebelumnya akan dibuktikan bahwa $\forall i \in [2^n-1]^*$, berlaku $\mathbf{y}_i \ne \underbrace{00\dots0}_{n-\text{bit}}$. Perhatikan bahwa $\underbrace{00\dots0}_{n-\text{bit}} = \sum_{k\in O(S_{2^n})} \mathbf{r}_k$, dan tidak ada kombinasi linier lain dari $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\}$ yang menghasilkan vektor $\underbrace{00\dots0}_{n-\text{bit}}$. Karena $\bar{S}_{G(n)}$ adalah barisan transisi, jelas $O(S_{2^n}) = \emptyset$, dan $\forall i \in [2^n-1]^*$, berlaku $O(S_i) \ne \emptyset$. Ambil sebarang katakode $\mathbf{y}_{i-1} = \sum_{k\in O(S_{i-1})} \mathbf{r}_k$ dan $\mathbf{y}_i = \sum_{k\in O(S_i)} \mathbf{r}_k$, dengan $i \in [2^n-1]$. Karena $O(S_i) \dotplus O(S_{i-1}) = \mathbf{r}_{s_i}$, katakode $\mathbf{y}_i$ dan $\mathbf{y}_{i+1}$ berbeda pada posisi dimana entri dari kolom-kolom $\mathbf{r}_{s_i}$ adalah 1. Ini berarti, transisi dari $\mathbf{y}_{i-1}$ ke $\mathbf{y}_i$ adalah $\pi_{(n,t)}(s_i)$. Perhatikan bahwa Selanjutnya, $O(S_{2^n}) \dotplus O(S_{2^n-1}) = \mathbf{r}_{s_{2^n}}$, yang berarti transisi dari $\mathbf{y}_{2^n-1}$ ke $\mathbf{y}_0$ adalah $\pi_{(n,t)}(s_{2^n})$. Lebih lanjut, $\pi_{(n,t)}(s_1), \pi_{(n,t)}(s_2), \dots$, dan $\pi_{(n,t)}(s_{2^n})$ adalah himpunan dengan kardinalitas t. Jadi, $\bar{S}_{\varphi(n,t)} = \pi_{(n,t)}(s_1), \pi_{(n,t)}(s_2), \dots, \pi_{(n,t)}(s_{2^n})$ adalah barisan transisi dari barisan hitung seragam $\varphi(n,t) = \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{2^n-1}$.

■

Contoh 1

Misal $\alpha := (1,1,1,0,0)$, sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\pi_{(5,3)}(1) = \{1,2,3\}$, $\pi_{(5,3)}(2) = \{2,3,4\}$, $\pi_{(5,3)}(3) = \{3,4,5\}$, $\pi_{(5,3)}(4) = \{4,5,1\}$, $\pi_{(5,3)}(5) = \{5,1,2\}$.

Ambil kode basis $G(5)$ dengan barisan transisi $\bar{S}_{G(5)} := 2,1,3,1,2,1,3,4,3,5,3,4,3,1,4,$ $5,2,1,5,1,4,1,3,4,5,1,2,5,2,4,2,5$.

Barisan transisi dari $\varphi(5,3)$ hasil pemetaan (1) adalah: $\bar{S}_{\varphi(5,3)} = \{2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\},$
$\{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{4,5,1\}, \{3,4,5\}, \{5,1,2\}, \{3,4,5\},$
$\{4,5,1\}, \{3,4,5\}, \{1,2,3\}, \{4,5,1\}, \{5,1,2\}, \{2,3,4\},$
$\{1,2,3\}, \{5,1,2\}, \{1,2,3\}, \{4,5,1\}, \{1,2,3\}, \{3,4,5\},$
$\{4,5,1\}, \{5,1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{5,1,2\}, \{2,3,4\},$
$\{4,5,1\}, \{2,3,4\}, \{5,1,2\}$.

Misalkan terdapat kata biner $\mathbf{x}_j$ dengan panjang *n*, *komplemen* dari kata biner $\mathbf{x}_j$ didefinisikan sebagai kata biner $\mathbf{x}_j^c := \mathbf{x}_j \oplus 1$. Dalam hal ini, $\oplus$ menotasikan penjumlahan dalam $GF(2)$, yaitu $\forall i, j \in \{0,1\}, i \oplus j = (i + j)(\text{mod } 2)$.

Teorema 3

Misal $n, t \in \mathbb{N}, n > t$, n genap, dan t ganjil. Jika $\varphi(n,t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2^n-1}$ adalah barisan hitung seragam. Maka barisan
$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ dan
$\mathbf{x}_0^c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_3 \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}^c, \mathbf{x}_{2^n-1}$
adalah barisan hitung seragam $\varphi(n, n-t)$.

Bukti

Perhatikan bahwa barisan $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ diperoleh dengan mengkomplemenkan setiap katakode $\varphi(n,t)$ dengan indeks ganjil. Karena n genap dan t ganjil, maka $(n-t)$ ganjil. Ambil sebarang katakode $\mathbf{x}_i \in \varphi(n,t)$. Jika bobot $\mathbf{x}_i$ adalah k, maka bobot $\mathbf{x}_i^c$ adalah $(n-k)$. Karena n genap maka k dan $(n-k)$ memiliki paritas yang sama. Dengan demikian, $\forall i \in [2^n - 1]^0$, katakode $\mathbf{x}_i$ dan $\mathbf{x}_i^c$ memiliki paritas bobot yang sama. Ini berarti $\{\mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_3^c, \dots, \mathbf{x}_{2^n-1}^c\}$ merupakan permutasi dari $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2^n-1}\}$. Jadi, barisan $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ memuat 2^n katakode berbeda. Selanjutnya, $\forall i \in [2^n - 1]^0$ berlaku $d_H(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = t$, akibatnya $d_H(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}^c) = n - t$ dan $d_H(\mathbf{x}_i^c, \mathbf{x}_{i+1}) = n - t$. Hal ini juga berlaku untuk katakode $\mathbf{x}_{2^n-1}$ dan $\mathbf{x}_0$. Jadi, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ adalah barisan hitung seragam $\varphi(n, n-t)$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa $\mathbf{x}_0^c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_3 \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}^c, \mathbf{x}_{2^n-1}$ diperoleh dengan cara mengkomplemenkan setiap katakode dari $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$, sehingga juga merupakan barisan hitung seragam $\varphi(n, n-t)$.

∎

Beberapa akibat dari Teorema 3 dinyatakan dalam Akibat Teorema 3 (a) dan (b) sebagai berikut.

Akibat Teorema 3 (a)

Barisan: $\varphi(n, n-t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ dan $\varphi(n, n-t) = \mathbf{x}_0^c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_3 \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}^c, \mathbf{x}_{2^n-1}$ memiliki barisan transisi yang sama, yaitu $\bar{S}_{\varphi(n,n-t)} = [n]^* \setminus s_1, [n]^* \setminus s_2, \dots, [n]^* \setminus s_{2^n}$.

Bukti

Barisan hitung: $\varphi(n, n-t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ dan $\varphi(n, n-t) = \mathbf{x}_0^c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_3 \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}^c, \mathbf{x}_{2^n-1}$ memiliki barisan transisi yang sama sebab $\mathbf{x}_0^c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_3 \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}^c, \mathbf{x}_{2^n-1}$ diperoleh dengan cara mengkomplemenkan setiap katakode dari $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$. Selanjutnya, misal $\bar{S}_{\varphi(n,t)} = s_1, s_2, \dots, s_{2^n}$ adalah barisan transisi dari $\varphi(n,t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2^n-1}$. Untuk setiap $i \in [2^n - 1]$, transisi dari $\mathbf{x}_i$ ke $\mathbf{x}_{i+1}$ adalah s_{i+1}, sehingga transisi dari $\mathbf{x}_i^c$ ke $\mathbf{x}_{i+1}$ maupun dari $\mathbf{x}_i$ ke $\mathbf{x}_{i+1}^c$ adalah $[n] \setminus s_{i+1}$. Hal ini juga berlaku untuk katakode $\mathbf{x}_{2^n-1}$ dan $\mathbf{x}_0$. Akibatnya, barisan transisi dari $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$adalah $\bar{S}_{\varphi(n,n-t)} = [n]^* \setminus s_1, [n]^* \setminus s_2, \dots, [n]^* \setminus s_{2^n}$.

∎

Akibat Teorema 3 (b)

Misal $n, t \in \mathbb{N}, n > t$, n genap, dan t ganjil. Jika $\varphi(n,t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2^n-1}$ adalah barisan hitung seragam seimbang, maka $\varphi(n, n-t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3^c \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}, \mathbf{x}_{2^n-1}^c$ dan $\varphi(n, n-t) = \mathbf{x}_0^c, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_3 \, \dots, \mathbf{x}_{2^n-2}^c, \mathbf{x}_{2^n-1}$ adalah barisan hitung seragam seimbang. Lebih lanjut, jika $\varphi(n,t)$ seimbang total, maka $\varphi(n, n-t)$ seimbang total.

Bukti

Misal $\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)} = \left(\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(1), \dots, \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n)\right)$ dan $\bar{S}_{\varphi(n,t)} = s_1, s_2, \dots, s_{2^n}$. Sesuai Akibat Teorema 2 (a), $\bar{S}_{\varphi(n,n-t)} = [n]^* \setminus s_1, [n]^* \setminus s_2, \dots, [n]^* \setminus s_{2^n}$. Sehingga $\mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)} = \left(\mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)}(1), \dots, \mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)}(n)\right)$, dimana $\mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)}(i) = 2^n - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i)$, $\forall i \in [n]^*$. Jika $\varphi(n,t)$ adalah barisan hitung seragam seimbang, maka $\forall i, j \in [n]^*$ berlaku $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| \leq 2$. Dengan demikian,

$$\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(nn-,t)}(j)\right| = \left|\left(2^n - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i)\right) - \left(2^n - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right)\right| =$$

$$\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| \leq 2.$$

Ini berarti $\varphi(n, n-t)$ adalah barisan hitung seragam seimbang. Akibatnya, jika $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| = 0$, maka $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,n-t)}(j)\right| = 0$.

Secara umum, jika $\bar{S}_{G(n)}$ adalah barisan transisi dari kode Gray seimbang total, maka barisan transisi $\bar{S}_{\varphi(n,t)}$ yang dihasilkan berdasarkan pemetaan $\pi_{(n,t)}$ adalah barisan transisi dari barisan hitung seragam seimbang total.

Pada bagian berikutnya dijelaskan beberapa konstruksi matriks sirkulan biner nonsingular beserta barisan hitung seragam yang dihasilkan.

Barisan Hitung Seragam $\boldsymbol{\varphi(n,t)}$ dengan $\mathbf{fpb}(\boldsymbol{n,t}) = \mathbf{1}$

Konstruksi berikut pada dasarnya memberikan hasil yang sama dengan konstruksi yang diberikan oleh Suparta (2006) tentang barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ dimana $\text{fpb}(n,t) = 1$. Konstruksi tersebut dapat pula dianalisis dengan menggunakan matriks sirkulan biner.

Teorema 4

Misalkan $n, t \in \mathbb{N}, n > t$, t ganjil, dan $\mathbf{A}_{(n,t)} \coloneqq \text{circ}_{(n,t)}\{\alpha\}$ dengan $\alpha = \underbrace{11\ldots1}_{t}\ \underbrace{00\ldots0}_{(n-t)}$ (2)

Jika $\text{fpb}(n,t) = 1$ maka $\mathbf{A}_{(n,t)}$ nonsingular, dan jika $\text{fpb}(n,t) > 1$ maka $\mathbf{A}_{(n,t)}$ singular.

Berdasarkan Teorema 4, jika $\text{fpb}(n,t) = 1$, barisan hitung seragam yang dihasilkan dari matriks (2) merupakan barisan hitung seragam seimbang. Bukti lengkap dari Teorema 4 dapat dilihat pada Sintiari (2014). Bukti lain dapat dilihat pada Suparta (2006). Berdasarkan Teorema 4, tidak mungkin untuk mengkonstruksi barisan hitung seragam dengan generator $\alpha = \underbrace{11\ldots1}_{t}\ \underbrace{00\ldots0}_{(n-t)}$ jika $\text{fpb}(n,t) > 1$. Pada bagian selanjutnya, akan dibahas tentang konstruksi barisan hitung seragam untuk kasus $\text{fpb}(n,t) > 1$.

Barisan Hitung Seragam $\boldsymbol{\varphi(n,t)}$ dengan $\mathbf{FPB}(\boldsymbol{n,t}) > \mathbf{1}$

Untuk kasus $\text{fpb}(n,t) > 1$ belum ditemukan konstruksi umum untuk membentuk barisan hitung seragam seimbang untuk sebarang pasangan (n,t). Berikut beberapa konstruksi yang ditemukan.

Teorema 5

Misal $n, t \in \mathbb{N}, n > t$, t ganjil, $n = w \cdot y$, dengan $y \geq t$ *dan* $\mathbf{A}_{(n,t)} \coloneqq \text{circ}_{(n,t)}\{\alpha\}$ dimana $\alpha = \underbrace{100\ldots0}_{w}\ldots\underbrace{100\ldots0}_{w}\ \underbrace{00\ldots0}_{n-wt}$ (4)

Jika $\text{fpb}(y,t) = 1$ maka $\mathbf{A}_{(n,t)}$ nonsingular.

Sebagai akibat dari Teorema 5, jika $w \neq \text{fpb}(n,t)$ maka $\mathbf{A}_{(n,t)}$ adalah matriks singular. Penghitung transisi dari $\varphi(n,t)$ yang dikonstruksi berdasarkan matriks (4) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{TC}_{\varphi(n,t)}(j) &= \text{TC}_{G(n)}(j) + \text{TC}_{G(n)}(j^{-w}) + \text{TC}_{G(n)}(j^{-2w}) \\ &+ \cdots + \text{TC}_{G(n)}(j^{-(t-1)w}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \text{TC}_{G(n)}(j) + \text{TC}_{G(n)}(j^{(y-1)w}) + \text{TC}_{G(n)}(j^{(y-2)w}) + \cdots + \text{TC}_{G(n)}(j^{(y-t+1)w})$$

(*bukti dari teorema ini dapat dilihat pada* Sintiari (2014))

Teorema 6

Misal $n, t \in \mathbb{N}$, t ganjil, $w = \text{fpb}(n,t)$, $y = \frac{n}{w}$, dan kode basis merupakan kode Gray seimbang yang memuat K bilangan b dan $(n-K)$ bilangan a dimana $a, b \in \{p, p+2\}$ dengan p genap. Misal $c \cdot w < \min\{K, (n-K)\} \leq (c+1)w$ dengan $c \in \mathbb{N}, c > 1$. Jika $c \leq \left\lfloor \frac{y}{t} \right\rfloor - 1$, maka pemetaan $\pi_{(n,t)}$ berdasarkan matriks (4) yang nonsingular dapat menghasilkan barisan hitung seragam seimbang $\varphi(n,t)$.

Bukti

Karena $c \leq \left\lfloor \frac{y}{t} \right\rfloor - 1$ maka $t \leq \left\lfloor \frac{y}{c+1} \right\rfloor$. Perhatikan bahwa istribusi penghitung transisi dari barisan hitung seragam yang diperoleh dari matriks (4) adalah (5). Selanjutnya, kelompokkan penghitung transisi $\text{TC}_{G(n)}$ menjadi w himpunan yaitu $H_0, H_1, \dots, H_{w-1}$, yang berbentuk:

$$H_l \coloneqq \{\text{TC}_{G(n)}(l), \text{TC}_{G(n)}(l^w), \text{TC}_{G(n)}(l^{2w}), \\ \dots, \text{TC}_{G(n)}\left(l^{(y-1)w}\right)\} \qquad (6)$$

untuk $l = 0,1,\dots,w-1$. Dari (5) dan (6), dapat disimpulkan bahw*a* $\forall j \in \{1,2,\dots,n\}$ dengan $j \equiv l (\text{mod } w)$, nilai $\text{TC}_{\varphi(n,t)}(j)$ bergantung pada jumlah t bilangan berurutan di H_l. Ini berarti $\text{TC}_{\varphi(n,t)}(j) = \sum \Gamma_j$, dengan Γ_j merupakan suatu t-blok di H_l. Distribusi penghitung transisi $\text{TC}_{G(n)} = (\text{TC}_{G(n)}(1), \text{TC}_{G(n)}(2), \dots, \text{TC}_{G(n)}(n))$.

Misal $\text{TC}_{G(n)}$ memuat K bilangan b dan $(n-K)$ bilangan a, dan tanpa mengurangi keumuman misalkan $\min\{K, (n-K)\} = K$, sehingga $c \cdot w < K \leq (c+1)w$. Misalkan pula $k = \left\lfloor \frac{K}{q} \right\rfloor$ maka $c < k \leq (c+1)$. Jika $K = (c+1)q$ maka $k = c+1$, dan jika $c \cdot w < K < (c+1)w$ maka $k = c$. Selanjutnya $\forall i \in [q-1]$, susun H_i agar membentuk distribusi reguler. Perhatikan bahwa, jika $k = c+1$ maka $H_i = \underbrace{b, a, a \dots, a}_{P_1}, \dots, \underbrace{b, a, a \dots, a}_{P_{c+1}}$ dan jika $k = c$ maka $H_i = \underbrace{b, a, a \dots, a}_{P'_1}, \dots, \underbrace{b, a, a \dots, a}_{P'_c}$. Dalam hal ini, $P_m = \left\lfloor \frac{y}{c+1} \right\rfloor$ atau $\left\lceil \frac{y}{c+1} \right\rceil$, dan $P'_m = \left\lfloor \frac{y}{c} \right\rfloor$ atau $\left\lceil \frac{y}{c} \right\rceil$, untuk $m = 1,2,\dots,c+1$.

(i) Untuk kasus $k = c+1$, maka $\forall l \in [w-1]$, H_i memiliki distribusi reguler yang sama dan memuat $(c+1)$ bilangan $(p+2)$. Dengan demikian, selisih antara banyaknya bilangan p (demikian pula $(p+2)$) di setiap *t*-blok di H_l tidak lebih dari 1.

(ii) Untuk kasus $k = c$, maka $\exists l \in [w-1]$, sedemikian sehingga H_l memuat $(c+1)$ elemen b Sementara untuk l yang lainnya, H_l hanya memuat c bilangan b. Notasikan H_l yang memuat c bilangan b sebagai H_l^c, dan H_l yang memuat $(c+1)$ bilangan b sebagai H_l^{c+1}. Jika $t \leq \left\lfloor \frac{y}{c+1} \right\rfloor$, maka $\forall l \in [w-1]$ tidak ada *t*-blok di H_l^{c+1} yang memuat dua bilangan b.

Dengan demikian, setiap t-blok di H_i^c juga hanya akan memuat sebuah bilangan b, atau hanya memuat bilangan a. Dengan demikian, selisih antara banyaknya bilangan a (demikian pula b) di setiap t-blok di H_i tidak lebih dari 1.

Perhatikan bahwa $|b-a|=2$. Dengan demikian, untuk setiap $i,j \in [n]^*$, $\left|\sum \Gamma_i - \sum \Gamma_j\right| \leq 2$, yang berarti $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| \leq 2$. Jadi barisan hitung seragam yang dihasilkan seimbang.

Dalam penelitian ini, barisan hitung seragam yang dikonstruksi berdasarkan matriks (4) belum dapat dibuktikan keseimbangannya untuk setiap pasangan (n,t). Konstruksi tersebut menghasilkan barisan hitung seragam hampir seimbang.

Teorema 7

Misal $n,t \in \mathbb{N}$, t ganjil, $w|\,\mathrm{fpb}(n,t)$, dan $y=\frac{n}{w}$ dengan $w \in \mathbb{N}$. Jika kode basis yang digunakan dalam (4) merupakan kode Gray seimbang, maka matriks (4) dapat menghasilkan barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ yang hampir seimbang.

Bukti

Perhatikan persamaan (5) dan (6). Misal $\mathrm{TC}_{G(n)}$ memuat K bilangan b dan $(n-K)$ bilangan a dimana $a,b \in \{p,p+2\}$ dengan p genap. Tanpa mengurangi keumuman misal $\min\{K,(n-K)\}=K$, dan $k=\left\lfloor \frac{K}{d} \right\rfloor$. Akibatnya, $\forall i \in [w-1]$, H_i memuat k bilangan b dan $(y-k)$ bilangan a, atau memuat $(k+1)$ bilangan b dan $(y-k-1)$ bilangan a. Untuk setiap $i \in [w-1]^0$, susun H_i sehingga membentuk distribusi reguler. Misal $\mathcal{D}_1$ adalah distribusi reguler yang memuat k bilangan b dan $(y-k)$ bilangan a, dan $\mathcal{D}_2$ adalah distribusi reguler yang memuat $(k+1)$ bilangan b dan $(y-k-1)$ bilangan a. Perhatikan bahwa jika kedua t-blok berasal dari distribusi yang sama, maka selisih banyaknya bilangan b pada kedua blok tersebut pastilah kurang dari atau sama dengan 1, sebab distribusinya reguler. Selanjutnya, andaikan terdapat q_1 buah t-blok pada $\mathcal{D}_1$ yang memuat k_b bilangan b, dan terdapat q_2 buah t-blok pada $\mathcal{D}_2$ yang memuat (k_b+m) bilangan a. Karena $\mathcal{D}_1$ dan $\mathcal{D}_2$ reguler, maka terdapat $(y-q_1)$ buah t-blok pada $\mathcal{D}_1$ yang memuat (k_b+1) bilangan b, dan terdapat $(y-q_2)$ buah t-blok pada $\mathcal{D}_2$ yang memuat (k_b+m-1) bilangan b. Dengan demikian,

(i) Banyaknya bilangan b pada $\mathcal{D}_1$ adalah $\frac{q_1 \cdot m+(y-q_1)(m+1)}{t}$ sehingga:

$$k=\frac{q_1 \cdot k_b+(y-q_1)(k_b+1)}{t}$$
$$\Leftrightarrow kt = yk_b + y - q_1$$

(ii) Banyaknya bilangan b pada $\mathcal{D}_2$ adalah $\frac{q_2 \cdot (k_b+m)+(y-q_2)(k_b+2)}{t}$ sehingga:

$$k+1=\frac{q_2 \cdot (k_b+m)+(y-q_2)(k_b+m-1)}{t}$$
$$\Leftrightarrow kt+t = yk_b + ym - y + q_2$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh:

$$(yk_b + y - q_1) + t = yk_b + ym - y + q_2$$

$\Leftrightarrow t-(m-2)y=q_1+q_2$

Perhatikan bahwa $q_1,q_2\in\mathbb{N}$. Karena $t\leq y$, maka persamaan terakhir terjadi jika dan hanya jika $m\leq 2$. Ini berarti tidak ada dua *t*-blok yang selisih antara banyaknya bilangan b pada bloknya lebih dari 2. Dengan demikian, $\left|\sum\Gamma_i-\sum\Gamma_j\right|\leq 4$, yang berarti $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i)-\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right|\leq 4$ untuk $\forall i,j\in[n]^*$.

■

Contoh 3

Barisan hitung seragam seimbang $\varphi(60,3)$ dapat disusun dari kode Gray seimbang $\mathrm{G}(60)$ berdasarkan matriks (4), dengan $w=3$ $2^{60}=19215358410114116\cdot 60+16$. Dalam hal ini, $c=2$. Dalam hal ini, $\mathrm{H}_1=\mathrm{H}_2=b,\underbrace{a,\dots,a}_{6\text{ suku}},b,\underbrace{a,\dots,a}_{5\text{ suku}},b,\underbrace{a,\dots,a}_{6\text{ suku}}$ dan $\mathrm{H}_0=b,\underbrace{a,\dots,a}_{9\text{ suku}},b,\underbrace{a,\dots,a}_{9\text{ suku}}$, dimana $a=19215358410114116$ dan $b=19215358410114118$, dan

$$\mathrm{TC}_{\varphi(60,3)}=\underbrace{v,\dots,v}_{9\text{ suku}},\underbrace{u,\dots,u}_{12\text{ suku}},\underbrace{v,v,u,\dots,v,v,u}_{9\text{ suku}},\underbrace{u,u,v,\dots,u,u,v}_{9\text{ suku}},\underbrace{v,v,u,\dots,v,v,u}_{9\text{ suku}},\underbrace{u,\dots,u}_{12\text{ suku}},$$

dimana $u=57646075230342348$ dan $v=57646075230342350$.

Barisan Hitung Seragam $\boldsymbol{\varphi(2^m t,t)}$

Barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ dengan $\mathrm{fpb}(n,t)>1$ yang dapat dibuat berbentuk $\varphi(2^m t,t)$.

Teorema 9

Misal $m,t\in\mathbb{N}$, t ganjil. Matriks $\mathbf{A}_{(2^m t,t)}=\mathrm{circ}_{(2^m t,t)}\{\alpha\}$ (7)
dengan $\alpha=\underbrace{1,1,0,0,\dots,1,1,0,0}_{2(t-1)},1,0,\underbrace{0,0,\dots,0}_{(2^n t-2t)}$ adalah matriks nonsingular.

(*bukti dari teorema ini dapat dilihat pada* Sintiari (2014))

Penghitung transisi dari $\varphi(n,t)$ dengan $n=2^m t$ yang dikonstruksi berdasarkan matriks (7) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(1)=\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(1)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(3)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(6)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(7)+\cdots+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-7)+\\
&\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-4)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-3)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n)\\[1em]
&\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(2)=\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(2)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(4)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(7)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(8)+\cdots+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-6)+\\
&\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-3)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-2)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(1)\\[1em]
&\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n)=\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(2)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(5)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(6)+\cdots+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-8)+\\
&\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-5)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-4)+\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(n-1)
\end{aligned}\right\}(8)$$

Berdasarkan Teorema 2, berdasarkan barisan hitung seragam $\varphi(2^m t, t)$ dapat dikonstruksi barisan hitung seragam $\varphi\big((2^m - 1)t, t\big)$. Jika $m = 1$, barisan hitung seragam $\varphi(2^m t, t)$ menghasilkan barisan hitung seragam dengan distribusi penghitung transisi yang cukup baik.

Teorema 10

Misal $t \in \mathbb{N}$, t ganjil, $m = 1$, dan kode basis merupakan kode Gray seimbang dengan distribusi penghitung transisi memuat $2k$ bilangan b dan $(n - 2k)$ bilangan a dengan $a, b \in \{p, p + 2\}$ dimana p genap. Jika K genap, maka matriks (7) dapat menghasilkan barisan hitung seragam $\varphi(n, t)$ yang hampir seimbang.

Bukti

Misal $\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}$ memuat $2k$ bilangan b dan $2(t - k)$ bilangan a. Kelompokkan posisi bit dari $\mathrm{G}(n)$ menjadi 2 himpunan, yaitu R_1 dan R_2 yang masing-masing memuat k bilangan b dan $(t - k)$ bilangan a. R_1 adalah himpunan baris pada kolom pertama matriks (7) yang memiliki entri 1, dan R_2 adalah himpunan baris pada kolom pertama matriks (7) yang memiliki entri 0. Dengan kata lain,

$$\mathrm{R}_1 = \{1,3,6,7, \ldots, n - 7, n - 4, n - 3, n\}$$
$$\mathrm{R}_2 = \{2,4,5,8, \ldots, n - 6, n - 5, n - 2, n - 1\}$$

Selanjutnya distribusikan bilangan a dan b ke R_1 dan R_2, sesuai aturan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Indeks Penghitung Transisi Kode Gray $\mathrm{G}(n)$

Indeks	1	2	3	4	5	...	$t-3$	$t-2$	$t-1$	t
R_1	1	n	$n-3$	$n-4$	$n-7$	...	10	7	6	3
R_2	$n-1$	$n-2$	$n-5$	$n-6$	$n-9$	...	8	5	4	2

Dalam hal ini, $\forall i \in \mathrm{R}_1$ dan $j \in \mathrm{R}_2$ berlaku $\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(i) = \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j)$ jika i dan j memiliki indeks yang sama. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\forall i, j \in [n]^*$, berlaku

$$\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| \leq 4.$$

Untuk itu, akan ditunjukkan bahwa $\forall i \in [n]^*$, $\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i)$ yang dirumuskan sebelumnya tidak memuat lebih dari dua penghitung transisi bit dengan indeks yang sama.

Perhatikan bahwa posisi bit yang memiliki indeks sama memiliki selisih sama dengan 2 (secara siklis), kecuali posisi bit dengan indeks t. Untuk setiap $i \in [n]^*$, penjumlahan penghitung transisi posisi bit yang memuat sepasang penghitung transisi dengan indeks sama dan bukan t terdapat pada:

$$\begin{gathered}\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(4), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(5), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(8), \ldots, \\ \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-6), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-5), \\ \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-2), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-1).\end{gathered} \quad (9)$$

Posisi bit pada (9) dapat dipandang sebagai gabungan dua barisan aritmatika yaitu: $4{,}8{,}12,\dots,n-1$ dan $5{,}9{,}13,\dots,n-2$. Sementara penjumlahan penghitung transisi posisi bit yang memuat sepasang penghitung transisi dengan indeks sama dengan t terdapat pada:

$\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(3), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(7), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(11), \dots,$ (1

$\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-11), \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-7),$

$\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(n-3)$

Posisi bit pada (10) dapat dipandang sebagai barisan aritmatika yaitu: $3{,}7{,}11,\dots,n-3$. Dengan demikian, $\{3{,}7{,}11,\dots,n-3\} \cap (\{4{,}8{,}12,\dots,n-1\} \cup \{5{,}9{,}13,\dots,n-2\}) = \emptyset$. Ini berarti, $\forall i \in [n]^*$, $\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i)$ pada (8) tidak memuat lebih dari dua penghitung transisi bit dengan indeks yang sama. Karena $\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i)$ tidak memuat lebih dari dua penghitung transisi bit dengan indeks yang sama, maka $\forall i,j \in [n]^*$, berlaku $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| \le 4$.

■

Contoh 4

Barisan hitung seragam seimbang $\varphi(18{,}9)$ disusun dari kode Gray seimbang $\mathrm{G}(18)$ berdasarkan matriks (7).Dalam hal ini,
$\mathrm{TC}_{18} = (a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,a,b,b,b,b)$, dimana $a = 14564$ dan $b = 14562$, dan $\mathrm{TC}_{\varphi(18,9)} = (v,v,v,w,u,v,w,v,u,v,w,v,u,v,w,v,u,v)$ dengan $u = 131060$, $v = 131062$, dan $w = 131064$. Jadi, $\forall i,j \in [18]$, berlaku $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(18,9)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(18,9)}(j)\right| \le 4$,
yang berarti $\varphi(18{,}9)$ hampir seimbang.

Barisan Hitung Seragam $\varphi(2t,t)$

Pada bagian berikut, dijelaskan konstruksi lain berbentuk $\varphi(2t,t)$ yang menghasilkan barisan hampir seimbang. Meskipun menghasilkan barisan hitung seragam yang sama dengan konstruksi pada bagian C yaitu $\varphi(2t,t)$, namun konstruksi ini memiliki generator yang berbeda. Kelebihan dari konstruksi berikut dibandingkan dengan konstruksi pada bagian C adalah bahwa konstruksi berikut lebih sederhana dan menghasilkan barisan hitung seragam hampir seimbang untuk setiap t ganjil, jika kode basisnya adalah kode Gray seimbang. Matriks sirkulan yang digunakan ditampilkan pada teorema berikut.

Teorema 11

Misal $n,t \in N, n > t, t$ ganjil. Jika $\mathbf{A}_{(2t,t)} = \mathrm{circ}_{(2t,t)}\{\alpha\}$
dengan $\alpha = \underbrace{11\dots1}_{(t-1)}\ 0\ 1\ \underbrace{0\,0\dots0}_{(t-1)\text{entri}}$ (11)
maka $\mathbf{A}_{(2t,t)}$ adalah matriks nonsingular.

(*bukti dari teorema ini dapat dilihat pada* Sintiari (2014))

Penghitung transisi dari $\varphi(n,t)$ yang dikonstruksi berdasarkan matriks (8) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j) = \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j) + \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-1}) + \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-2}) + \cdots + \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-(t-2)}) + \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-t})$$

Barisan hitung seragam hasil konstruksi berdasarkan matriks (11) merupaakan barisan hitung seragam hampir seimbang sebagaimana dinyatakan pada teorema berikut.

Teorema 12

Misal $t \in \mathbb{N}$, t ganjil, dan $n = 2t$. Jika kode basis yang digunakan merupakan kode Gray seimbang, maka matriks (11) dapat mengkonstruksi barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ yang hampir seimbang.

Bukti

Misal $\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}$ memuat K bilangan b dan $(n-K)$ bilangan a dengan $a,b \in \{p, p+2\}$ dimana p genap. Sesuai Teorema 2.6, maka $\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}$ dapat disusun sedemikian sehingga membentuk distribusi reguler $\mathrm{TC'}_{\mathrm{G}(n)}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $j \in \{1, 2, ..., n\}$, barisan $\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j), \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-1})$,
$\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-2}), \dots, \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}\left(j^{-(t-2)}\right)$ adalah $(t-1)$-blok di $\mathrm{TC'}_{\mathrm{G}(n)}$. Karena $|a-b| = 2$, sehingga berlaku $\left|\sum \Gamma_i - \sum \Gamma_j\right| \leq 2$, dimana Γ_i dan Γ_j adalah sebarang $(t-1)$-blok di $\mathrm{TC'}_{\mathrm{G}(n)}$. Selanjutnya, $\forall i,j \in [n]^*$ jelas $\left|\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(i^{-t}) - \mathrm{TC}_{\mathrm{G}(n)}(j^{-t})\right| \leq 2$. Dengan demikian $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(n,t)}(j)\right| \leq 4$.

■

Contoh 5.

Barisan hitung seragam seimbang $\varphi(10{,}5)$ dapat disusun dari kode Gray seimbang $\mathrm{G}(10)$ berdasarkan matriks (11). Dalam hal ini, $\mathrm{TC}_{\mathrm{G}(18)} = (b,b,b,b,a,b,b,b,b,a)$, dimana $a = 104$ dan $b = 102$ dan $\mathrm{TC}_{\varphi(18,9)} = (v,v,v,u,w,v,v,v,u,w)$ dengan $u = 510, v = 512$, dan $w = 514$. Jadi, $\left|\mathrm{TC}_{\varphi(10,5)}(i) - \mathrm{TC}_{\varphi(10,5)}(j)\right| \leq 4$, $\forall i,j \in [10]$, yang berarti $\varphi(10{,}5)$ hampir seimbang.

PENUTUP

Barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$ dapat dikonstruksi dengan menggunakan matriks sirkulan biner yang nonsingular. Untuk mengkonstruksi barisan hitung seragam, dirumuskan fungsi untuk mentransformasi barisan transisi dari kode Gray seimbang $\mathrm{G}(n)$ menjadi barisan transisi dari barisan hitung seragam $\varphi(n,t)$. Dalam hal ini, n menyatakan panjang katakode dan t menyatakan jarak setiap katakode berurutan di $\mathrm{G}(n)$. Untuk kasus $\mathrm{fpb}(n,t) = 1$, selalu dapat dikonstruksi barisan $\varphi(n,t)$ dengan basis kode Gray seimbang. Namun, belum ditemukan konstruksi untuk membentuk barisan $\varphi(n,t)$ untuk setiap pasangan (n,t) dengan $\mathrm{fpb}(n,t) > 1$. Untuk menghasilkan barisan hitung seragam seimbang, semua konstruksi yang telah dijelaskan mensyaratkan untuk menggunakan kode Gray seimbang sebagai basis. Dari penelitian ini, diperoleh beberapa macam kontruksi untuk membentuk barisan hitung seragam seimbang. Akan tetapi, hasil yang diperoleh belum maksimal sebab hasil ini belum mencakup setiap pasangan (n,t). Beberapa konstruksi barisan hitung seragam yang diperoleh dari penelitian ini belum dapat dibuktikan apakah dapat menghasilkan barisan seimbang. Penulis meyakini hasil penelitian ini masih dapat dikembangkan untuk mendapatkan konstruksi barisan hitung seragam seimbang $\varphi(n,t)$ dengan $\mathrm{fpb}(n,t) = 1$. Oleh sebab itu, penulis berharap dapat ditemukan cara yang lebih baik untuk mengkonstruksi barisan hitung seragam seimbang.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kassih kepada Prof. Drs. Sariyasa, M.Sc., Phd. dan Dr. Gede Suweken, Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Ganesha untuk setiap saran dan bimbingan untuk perbaikan tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

Geller, D, et.al. 2004. On Circulant Matrices. *Makalah*. State University of Newyork at Stony Brook. Tersedia pada http://www.math.sunysb.edu/ ~sorin/eprints/circulant.pdf diakses tanggal 7 Januari 2014.

Hefferon, J. 2012. *Linear Algebra*. Mathematics, Saint Michael’s College Colchester, Vermont, USA.

Powell, P. D. 2011. Calculating Determinants Of Block Matrices. *Makalah*. Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Green St. Urbana. Tersedia pada http://arxiv.org/ pdf/1114379.pdf diakses tanggal 19 Juli 2013.

Richardson, T dan R. Urbanke. 2006. *Modern Coding Theory*. USA: Cambridge University Press.

Robinson, J. P. dan M. Cohn. 1981. “Counting Sequence”. *Journal of IEEE Trans. Computers*, Volume C-30, (hlm. 17-23).

Sintiari, N D. 2014. Konstruksi Barisan Hitung Seragam Seimbang Berbasis Barisan Transisi Kode Gray. *Skripsi*. Universitas Pendidikan Ganesha.

Suparta, I N. 2006. Counting Sequence, Gray Codes and Lexicodes. *Disertasi*. Delft University of Technology.