*Wahana Matematika dan Sains: Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya,*
*Vol. 14 No 1, April 2020*
*e-ISSN: 2549-6727 , p-ISSN: 1858-0629*

# Studi Filosofi Geometri Diferensial dan Ruang-Waktu

**Yamin Ismail[1*], Abas Kaluku[2]**

[1,2] *Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo*

*Corresponding Author : m.one.ikhwane@gmail.com*

## Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menelaah secara filosofi diferensial geometri dan ruang waktu, aspek kausal topologi dalam konsep teori relativitas umum Einstein dan pseudo-Riemannian alam semesta. Kami memandang bahwa pemahaman tentang geometri oleh ilmuan atau pelajar sangat perlu bagi pengembangan matematika dan sains. Perlu dilakukannya penyesuaian pandangan filosofis sesuai dengan perkembangan geometri. Dimana perkembangan geometri melampaui akal sehat manusia. Untuk itu, alangkah bijaknya kita jika bernalar secara filosofis agar perkembangan geometri tersebut mampu diterima akal sehat. Tujuan penelitian ini yakni memberikan makna filosofis daripada geometri berdasarkan perkembangan penelitian yang berhubungan dengan geometri dan ruang waktu. Metode penelitian yang digunakan adalah deduktif dikarenakan metode adalah membangun paradigma berpikir kritis untuk mengembangkan teknologi dan sains di Gorontalo khususnya dan Indonesia pada umumnya.

**Kata-kata kunci:** *Filosof ;, Geometri Diferensial; Ruang-Waktu*

## *Abstract*

*. This research aims to examine philosophically of differential geometry and spacetime, causal topology aspect in Einstein general relativity theory concept and pseudo-Riemannian of the universe. We see that understanding of geometry by scientist or student is important to delevopment of mathematic and science. It is necessary to adjust the philosophical view according to the geometry development. Where the development of geometry goes beyond common sense. So, it would be wise for us to think philosophically so that the geometry development can be accepted by common sense. The purpose of this research is to give philosophically mean of geometry based on delevopment of research about geometry and space-time. Research menthod used is deductive because it is based on sense. Hope of this proposal is to Gorontalo.build a critical thinking paradigm of developing technology and science in Indonesia especially in Gorontalo.*

**Keywords:** *Philosophi, Differential Geometry, Space-Time*

## PENDAHULUAN

Tujuan utama dari ilmu adalah aproksimasi struktur dengan aturan dan makna yang konsisten dalam fenomena fluks dan *chaos* yang disebut sebagai filsafat rasionalisme. Tujuan dari pemahaman ilmiah ini adalah mengkoordinasikan beberapa pangalaman dan membawanya ke dalam sistem yang logis. Berdasarkan sejarah, upaya intelektual diarahkan untuk penemuan pola, sistem dan struktur, dengan penekanan khusus pada rangka. Mengapa? Karena kontrolnya tidak dapat diperkirakan, kekhawatiran yang tidak diketahui, dan orang yang berusaha untuk memahami dan menemukan disebut ilmuan. Namun, pengetahuan memiliki keterbatasan yang merupakan ciri antropologis pengetahuan. Sains bukan semata kumpulan fakta atau observasi, tapi juga konsep-konsep untuk menjelaskan atau memahami pola-pola yang muncul dari data tersebut. Sains juga erat kaitannya dengan filsafat. Setiap orang yang mempelajari sains kiranya tak akan dapat mengelak untuk memberi semacam *benefit of the doubt* kepada pemikiran-pemikiran filsafat. Pada kenyataannya, sejarah sains bahkan hingga masa modern tak pernah bisa benar-benar dilepaskan dari perkembangan filsafat. Lebih dari itu, taka da peneliti atau pemikir serius dan rendah hati yang dengan mudah dapat menyampingkan pendekatan filosofis terhadap sains begitu saja. Sains bukannlah tentang kepastian (Rovelli, 2014).

Dalam kehidupan bermasyarakat, ciri atropologis pengetahuan sering diabaikan. Hal ini ditandai dengan gejala fanatisme dan ekstremisme di tengah masyarakat yang pluralis. Dogmatisasi menjadi hal yang wajar, pada hal tersebut bertentangan dengan sifat manusia itu sendiri yakni, memiliki rasa ingin tahu tentang dirinya dan alam semesta (albert Einstein sebenarnya lebih dogmatis darpada fleksibel. Teori relativitas ditemukannya melalui penelitian deduktif bukan induktif. Penelitian berupa pengujian dilakukan oleh eddington pada tahun 1919). Apalagi Nietzsche mendeklarasikan bahwa tidak ada fakta dan hanya interpretasi, kebenaran pun seolah-olah melekatkan diri ke proposisi.

Dalam penyampaian interpretasi perlu menggunakan bahasa. Bahasa sendiri memiliki keterbatasan dalam mengungkapkan suatu hasil pikiran atau penalaran. Untuk memperjelasnya perlu adanya penafsiran tentang suatu pengetahuan yang telah dibangun. Dalam hal ini, dikaji tentang geometri.

Geometri merupakan salah satu cabang dari matematika. Secara praktis, geometri membahas tentang panjang, luas, dan volume yang awalnya dikembangkan oleh Thales pada abad ke 6 SM. Kemudian pada abad ke 3 SM, Euclid mengembangkan geometri dalam bentuk aksioma yang dikenal dengan Geometri Euclidean yang menjadi standar selama berabad-abad.

Pada masa Euclid tidak ada perbedaan yang jelas antara ruang fisik dan ruang geometris. Sejak penemuan abad ke-19 geometri non-Euclid, konsep ruang telah mengalami transformasi radikal, dan muncul pertanyaan: mana ruang geometris paling sesuai dengan ruang fisik? Dengan meningkatnya matematika formal dalam abad ke-20, dibedakan antara ruang fisik, ruang geometris (di mana ruang, titik dan lain-lain masih memiliki arti intuitif) dan ruang abstrak. Geometri modern memiliki ikatan yang kuat dengan beberapa fisika, dicontohkan oleh hubungan antara geometri pseudo-Riemen dan relativitas umum. Salah satu teori fisika termuda, teori string, juga sangat geometris (Feyerabend, 1975).

*Wahana Matematika dan Sains: Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya,*
*Vol. 14 No 1, April 2020*
*e-ISSN: 2549-6727 , p-ISSN: 1858-0629*

Contoh lainnya yakni fungsi gelombang dirac direpresentasikan dalam bentuk di mana semua komponennya memiliki interpretasi geometris dan fisik yang jelas. Enam komponen menuliskan transformasi Lorentz menentukan kecepatan electron pada arah berputar. Ini memberikan dasar untuk koneksi yang kuat antara relativistik dinamika dan waktu evolusi fungsi gelombang. Sebaran matriks diberi bentuk baru sebagai operator spinor bernilai daripada fungsi kompleks. Pendekatan ini mengungkapkan struktur geometris dari sebaran matriks dan menyederahanakan perhitungan (Hestenes, 1966).

Alasan untuk mempertanyakan ruang-waktu adalah kesadaran bahwa struktur sementara global yang dipamerkan oleh solusi dari relativitas umum persamaan medan sangat relevan dengan perdebatan tentang sifat waktu. Pada tahun 1940, diterbitkan sejumlah makalah mani di mana ia menunjukkan adanya solusi dari persamaan Einstein yang kurva waktu seperti tertutup terjadi (Godel, 1949). Kami memandang bahwa pemahaman tentang geometri oleh ilmuan atau pelajar sangat perlu bagi pengembangan matematika dan sains. Perlu dilakukannya penyesuaian pandangan filosofis sesuai dengan perkembangan geometri. Di mana perkembangan geomteri melampaui “akal sehat” manusia. Untuk itu, alangkah bijaknya kita jika bernalar secara filosofis agar perkembangan geometri tersebut mampu diterima akal sehat.

Penalaran memerlukan penelusuran fakta (data empiric), asumsi, postulat, dan opini yang berkaitan dengan perkembangan geometrid an memberikan makna terhadap hasil penalaran tersebut. Tujuan penelitian ini yakni memberikan makna filososfis daripada geometri berdasarkan perkembangan penelitian yang berhubungan dengan geometri.

Kita dapat menyimak pengalaman Einstein. Di bawah pengaruh positivism-kritis ErnsMach, Einstein berpikir bahwa ia sudah bisa mengeliminasi ontology dari fisika ketika mengembangkan teori Relativitas Khusus (1905). Mach mambatasi pengetahuan pada kemampuannya mendeskripsikan relasi antara gejala inderawi. Posisi epistemology ini membantu Einstein melahirkan teori Relativitas khusus. Namun dalam proses merumuskan teori reativitas umum (1916) Einstein rupanya menyimpulkan bahwa sains punya tujuan konstruksi-spekulatif dan intuitif ketimbang semata-mata deskriptif (Supelli, 2011).

Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk menelaah persamaan diferensial geometri dan ruang waktu aspek kausal topologi dalam konsep teori relativitas umum Einstein dan pseudo-Riemannian alam semesta. Telaah yang dimaksud yaitu bersifat filosofis agar dapat dilakukannya penyesuaian pandangan filosofis sesuai dengan perkembangan geometri sebab pemahaman tentang geometri oleh ilmuan atau pelajar sangat perlu bagi pengembangan matematika dan sains.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode penelitian teoritis, deduktif, metode deduktif adalah metode berpikir yang menerapkan hal-hal yang umum terlebih dahulu untuk seterusnya dihubungkan dalam bagian-bagiannya yang khusus. Dalam laporan ini banyak memberikan filosofi dari berbagai sumber seperti buku dan beberapa jurnal ilmiah yang sesuai dengan bidangnya dan telaah fisis berdasarkan fundamental physics.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil yang telah dicapai berupa penyelesaian metrik tunggal potensial gravitasi Newtonian menggunakan medan tensor yang dalam relativitas umum Einstein memainkan peranan dalam medan gravitasi. Dalam koordinat lokasl, 2-form kurvatur Riemann dapat dituliskan,

$$\begin{aligned} R_i^j &= d\left(\Gamma_{ik}^j dx^k\right) + \Gamma_{im}^k dx^m \wedge \Gamma_{kn}^j dx^n \\ &= d\Gamma_{ik}^j \wedge dx^k + \Gamma_{im}^k \Gamma_{kn}^j \, dx^m \wedge dx^n \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^k + \Gamma_{im}^n \Gamma_{kn}^j dx^m \wedge dx^k \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{im}^j}{\partial x^k} + \Gamma_{im}^n \Gamma_{kn}^i - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{mn}^j\right) dx^m \wedge dx^k \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dengan demikian, maka Tensor Riemann dapat dituliskan,

$$R_{ilk}^j = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma_{im}^j}{\partial x^k} + \Gamma_{im}^n \Gamma_{kn}^j - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{mn}^j \tag{5.2}$$

Suatu ruang metrik-affine $(M, g, \omega)$ merupakan definisi untuk suatu metrik dan suatu koneksi linier yang mebutuhkan tidak bebas satu dengan yang lainnya. Metrik sendiri menentukan koneksi Levi-Civita bebas torsi $\widehat{\omega}$, dicirikan oleh

$$d\phi^\mu + \widehat{\omega}_v^\mu \wedge \theta^v = 0 \text{ dan } \widehat{D} g_{\mu v} = 0 \tag{5.3}$$

$$R_v^\mu = d\widehat{\omega}_v^\mu + \widehat{\omega}_\rho^\mu \wedge \widehat{\omega}_v^\rho \tag{5.4}$$

$$K_v^\mu = \omega_v^\mu - \widehat{\omega}_v^\mu \tag{5.5}$$

Menentukan torsi untuk $\omega$ dan turunan kovarian untuk g,

$$\Theta^{\mu} = K^{\mu}_{v} \wedge \theta^{v} \tag{5.6}$$

$$Dg_{\mu v} = -\kappa_{\mu v} - \kappa_{\mu v} \tag{5.7}$$

Kurvator untuk $\omega$ dapat ditulis sebagai

$$R^{\mu}_{v} = \hat{R}^{\mu}_{v} + \hat{D}K^{\mu}_{v} + K^{\mu}_{\rho} \wedge K^{\rho}_{v} \tag{5.8}$$

Dengan $k$ ketetapan gravitasi, dalam hal ini $k = 8\pi G/c^2$ (O'Connell, 1977) dan $\wedge$ tetapan kosmologi, dan $L_M$ merupakan bentuk-3 kerapatan langrangian. Ditulis dalam variasi sangat kecil sebagai

$$\dot{L} = \dot{e}^{a} \wedge \left(-\frac{1}{2k} R^{bc} * e_{abc} + \wedge * e_{a} + \tau_{a}\right) + \frac{1}{2}\dot{\omega}^{ab} \wedge \left(-\frac{1}{k} * e_{abc} T^{c} + \Sigma_{ab}\right) \tag{5.9}$$

Di mana variasi untuk lagrangian materi diberikan oleh netuk-2 *stress-energy*

$$\tau_{a} = \frac{\partial L_M}{\partial e^{a}} = T_{ab} * e^{b} \tag{5.10}$$

Dan bentuk-2 momentum angular

$$\Sigma_{ab} = \frac{\partial L_M}{\partial \omega^{ab}} = S_{ab,c}\, e^{c} \tag{5.11}$$

Sehingga persamaan nedab Einstein-Cartan dalam ruang waktu dengan metrik-affine dan langrangian untuk gravitasi menghasilkan bentu-4 yakni spin *s*. hubungan antara asimetri energy-momentum dan tensor $t_{\mu v}$ serta tensor kerapatan spin $s_{\mu v p}$ dapat dituliskan sebagai persamaan medan Sciama-Kibble,

$$Dg_{\mu v} = 0 \tag{5.12}$$

$$s_{\mu v} + s_{v \mu} = 0 \tag{5.13}$$

Persamaan medan Cartan,

$$D\left(g^{\mu\rho}\eta_{\rho v}\right) = 8\pi s^{\mu}_{v} \tag{5.14}$$

$$\eta_{\mu v p} \wedge \Theta^{\rho} = 8\pi s_{\mu v} \tag{5.15}$$

$$t^{\mu} = t^{\mu v}\eta_v \text{ dan } s^{\mu v} = s^{\mu v \rho}\eta_\rho \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\eta_{\mu v \rho} \wedge R^{v}_{\sigma} = -8\pi t_\mu \quad (5.17)$$

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2}g_{\mu v}R = 8\pi t_{\mu v} \quad (5.18)$$

$$Q^{\rho}_{\mu v} + \delta^{\rho}_{\mu}Q^{\sigma}_{v\sigma} + \delta^{\rho}_{v}Q^{\sigma}_{\mu\sigma} = 8\pi s^{\rho} = 8\pi s^{\rho}_{\mu v} \quad (5.19)$$

Berikut ini merupakan merupakan persamaan medan *Sciama-Kibble (Trautman, 2006),*

$$Q^{\rho}_{\mu v} = 8\pi\left(s^{\rho}_{\mu v} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\mu}s^{\sigma}_{\sigma v} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{v}s^{\sigma}_{\sigma\mu}\right) \quad (5.20)$$

Persamaan Dirac untuk partikel yang berspin $\frac{1}{2}$ yakni (Carmeli dan Malin, 2000),

$$\gamma^{\mu}(\nabla_\mu - ieA_\mu)\Psi = m\Psi \quad \text{(Natural } \hbar = c = 1) \quad (5.21)$$

Suatu $\Psi$ menjadi mesan spinor Dirac pada ruang waktu *M* empat dimensi. Jika tensor spin lenyap, yakni $\bar{\Psi}\,\gamma^5\Psi = 0,$ kemudian (dimmakis dan Hoissen, 1990),

$$\bar{\Psi}\Psi = 0 = \bar{\Psi}\gamma^5\Psi) \quad (5.22)$$

Untuk menentukan representasi dari teori dirac untuk ruangwaktu aljabar, dimulai dengan spinor $\Psi$, matriks kolom 4 bilangan kompleks. *u* memiliki sifat sebagai berikut

$$u^{*}u = 1 \quad (5.23)$$

$$\gamma_0 u = u \quad (5.24)$$

$$\gamma_2\gamma_1 u = i'u \quad (5.25)$$

Dalam hal ini dipandang $\gamma_\mu$, untuk waktu, sebagai matriks $4 \times 4$, dan $i'$ sebagai satuan imajiner dalam medan bilangan kompleks untuk aljabar Dirac. Spinor Dirac dapat ditulis dalam bentuk

$$\Psi = \Psi u) \quad (5.26)$$

Dimana $\Psi$ merupakan matriks yang dapat diekspresikan sebagai suatu polynomial dalam $\gamma_\mu$. Koefisiean dalam polynomial ini dapat diambil real, jika dalam bentuk koefisien imajinernya dijadikan real tanpa diubah. Diasumsikan bahwa $\Psi$ multivektor data real. Ruang multivektor datar (seperti spiner Dirac) merupakan dimensi-8, dengan skala pseudoskalar dan dimensi 6 bivektor.

Membedakan antara spinor $\Psi$ dalam ruangwaktu aljabar dari representasi matriksnya $\Psi$ di daam aljabar Dirac, ia disebut sebagai spinor real atau representative real untuk fungsi gelombang Dirac agar menegaskan eliminasi untuk imajiner $i'$, yang dengan cara demikian ditunjukkan ketidakterkaitan teori Dirac. Dalam bentuk fungsi gelombang real $\Psi$, persamaan Dirac untuk electron dapat dituliskan dalam bentuk,

$$\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\Psi\gamma_2\gamma_1 + eA_{\mu}\Psi = m\Psi\gamma_0 \qquad (5.27)$$

Dimana $m$ adalah massa dan $e = |e|$ adalah muatan electron, sementara itu, $A_{\mu} = A\gamma_{\mu}$ merupakan komponen potensial vector elektromagnetik. Untuk membuktikan bahwa ini ekivalen dengan bentuk matriks standar untuk persamaan Dirac, secara sederhana $\gamma$, diinterpretasikan sebagai matriks. Untuk mendapatkan persamaan standar, digunakan persamaan,

$$\gamma^{\mu}\left(i'\partial_{\mu} + eA_{\mu}\right)\Psi = m\Psi \qquad (5.28)$$

Persamaan real Dirac dapat dikerjakan tanpa meninjau representasi matriksnya,

$$\Psi + eA\Psi = \Psi\, p_0 \text{ dimana } A = A_{\mu}\gamma_{\mu} \qquad (5.29)$$

$\gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ merupakan operator diferensial, dan $\rho_0 = m\gamma_0$ menunjukkan vektor momentum untuk partikel yang mempunyai massa $m\; i = \gamma_2\gamma_1 = \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ dalam hal ini bivektor memainkan peranan dalam $i'$ yang muncul dengan tegas dalam bentuk persamaan Dirac. Geometri ruang dalam fisika Newtonian yakni bentuk ruang tiga dimensi yang mutlak, tidak terbatas, datar dan statis serta tidak berpengaruh oleh waktu $t$. Elemen garisnya diberikan oleh metrik Euclidean $(x, y, z)$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ (phythagoras)} \qquad (5.30)$$

Teori relativitas khusus Einstein menghasilkan geometri ruang-waktu empat dimensi,

$$ds^2 = c^2t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\left[1 - \left(\frac{dl}{cdt}\right)^2\right]dt^2 = c^2d\tau^2 \qquad (5.40)$$

Metrik Minkowski valid sistem inersia apa saja. Waktu proper $d\tau = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} dt^2$ dengan kecepatan $v = \frac{dl}{dt}$ yang lebih dikenal sebagai dilatasi waktu, yang menjadi catatan bahwa rangkaian kesatuan ruang waktu empat dimensi masih tak dinamis dalam relativitas khusus! Ini biasanya valid untuk semua fisika, sepanjang gravitasi tidak memainkan peranan. Situasi berubah secara metric ketika gravitasi dipertimbangkan memainkan peranan yang dominan dalam kosmologi. Kemudian ruangwaktu empat dimensi menjadi dinamis dan metrik. Minkowski (4.40) digantikan oleh metriKkRiemannian-Lorentzian,

$$ds^2 = g_{\mu\upsilon}(x^\rho)dx^\mu dx^\upsilon, x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (5.41)$$

Simetri metric tensor $g_{\mu\upsilon}$ memainkan peranan ganda: pada satu sisi ia menetukan geometri empat dimensi dari ruangwaktu,

$$G^{\mu\upsilon} - \Lambda\, g^{\mu\upsilon} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\upsilon} \quad (5.42)$$

G menunjukkan konstanta gravitasi Newton dan $\Lambda$ menunjukkan tetapan kosmologi). Disisi kiri bergantung pada $g_{\mu\upsilon}$

$$T^{\mu\upsilon} = (\rho + p)\frac{u^\mu u^\upsilon}{c^2} - p g^{\mu\upsilon} \quad (5.43)$$

Pada tahun 1922 dan 1924 Alexander Friedmann menemukan solusi untuk persamaan medan gravitasi, dengan dari tanpa $\Lambda$ adalah tidak static tetapi agak kelam (berekspansi) untuk faktor skala bergantung waktu $R(t)$. *(Friedmann-Lemaitre universe)* disebut dengan metric *Robertson-Walker*.

$$ds^2_{RW} = c^2 dt^2 - R^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (5.44)$$

$R(t)$.disini merupakan factor skala kosmik dan $\gamma_{ij}$ adalah metrik ruang tiga dimensi,

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} \quad (5.45)$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^* \gamma_0 = (-\Psi_2^* \Psi_1^*) \quad (5.46)$$

Dimana $\Psi_1$dan$\Psi_2$ merupakan bagian kompleks dari fungsi nilai persamaan diferensial Grassman. Realisasi riil dari matriks gamma $\gamma_a$ secara eksplisit,

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Turun kovariat luar untuk medan spinor didefinisikan menjadi

$$\nabla\Psi = d\Psi + \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma_{ab}\Psi \qquad \overline{\nabla\Psi} = d\overline{\Psi} + \frac{1}{2}\omega^{ab}\overline{\Psi}\sigma_{ab} \tag{5.48}$$

$$\sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a\gamma_b] = \frac{1}{2} * e_{abc}\gamma^c \tag{5.49}$$

Persamaan (5.49) merupakan 3-*form* kerapatan langrangian Dirac.

## KESIMPULAN DAN SARAN

Dalam penelitian ini telah digunakan persamaan differensial parsial nonliniear yang mana dalam kasus umum hanya beberapa solusi eksak yang diketahui. Penyederhanaan yang bagus akan suskes dilakukan oleh Einstein pada tahun 1917 ketika beliau membangun untuk yang pertama kalinya tentang model kovarian umum untuk alam semesta. Sehingga alam semesta Einstein disebut tanda dimulainya kosmologi modern. Asumsi ini untuk pengurangan simetri yang hebat terhadap persamaan Einstein, metric ruang waktu $g_{\mu v}$ bergantung pemisahaan dari parameter kurvatur ruang K hanya pada fungsi tunggal terhadap waktu, sehingga disebut factor skala kosmik *R(t)*, dan tensor energi-momentum harus dalam bentuk fluida sempurna, matematika menyatakan metric manifoldruang-waktu Pseudo-Riemannian empat dimensi $(M^4, g)$, pada tempat yang paling kecil, sebagai melengkungkan produk $M^4 = \Re \times_R M^3$, dimana $\Re$ menyatakan waktu kosmik, $M^3$merupakan simetri maksimal subruang tiga dimensi dengan kurvatur Gaussian $\aleph = \frac{K}{R^2(t)}$ dan $R\,(t)$ merupakan fungsi melengkung positif dimana saja. Disini parameter kurvatur tak berdimensi K adalah tetap, yang mana ada tiga nilai yang dapat dipilih yakni $K = 0, \pm 1$ berhubungan dengan tiga kurvatur ruang yang mungkin: $K = 0$ ($M^3$ =ruang datar tiga dimensi, disebut *"flat universe"), $K = 1$* ($M^3$ mempunyai kurvatur positif tetap, disebut *"spherical"* atau *"closed universe")*, $K = -1$ ($M^3$ mempunyai kurvatur negative tetap, disebut *"hyperbolic universe"*).

Dalam teori relativitas umum Einstein, prinsip kesetaraan lemah menyatakan bahwa keadaan jatuh bebas hanya menyatakan percepatan gravitasi local yang hakekatnya tidak bergantung terhadap komposisi dan struktur materi yang dipercepat (Moshe Carmeli, 1977). Tensor dalam persamaan tensor Riemann tensor (Peacock, 1999),$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\beta\mu}$ (tensor Ricci), $R = g^{\mu v}R_{\mu v}$ (skalar kurvatur)

$$R^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{d\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}}{dx^{\beta}} - \frac{d\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}{dx^{\gamma}} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha} \quad \text{(tensor Riemann)} \qquad (7.1)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha v} \left( \frac{\partial g_{\mu v}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda v}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{v}} \right) \quad \text{(simbol Christoffel)} \qquad (7.2)$$

Definisi dari tensor Einstein $G^{\mu V}$ diantaranya yakni,

$$G^{\mu v} = R^{\mu v} + \frac{1}{2} g^{\mu v} R \qquad (7.3)$$

$$G^{\mu v} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu v} \qquad (7.4)$$

M didefinisikan sebagai suatu manifold jika setiap titik pada M memiliki lingkungan terbuka *(open neighborhood)* dan *(open set)* dari bilangan riil $R^n$(Bo-You, 1997). Untuk perkalian kartesius *(2latersian Product)*, diasumsikan $\upsilon$ suatu vector tangensial yang dinyatakan terhadap basis-basisnya $\upsilon = \upsilon^i e_i$

$$\upsilon = \upsilon_x \frac{\partial}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (7.5)$$

Maka bekerjanya *operator exterior derivative d* dan $\upsilon$ merupakan perubahan infinitesimal dari $\upsilon$ dan dituliskan:

$$d\upsilon = d\upsilon_x \frac{\partial}{\partial x} + d\upsilon_y \frac{\partial}{\partial y} + d\upsilon_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (7.6)$$

$$d\upsilon = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^2 e_2 \qquad (7.7)$$

$$d\upsilon = \omega^i e_i \qquad (7.8)$$

Dimana $\omega^i$merupakan dual dari $e_i \; d^2\,\upsilon = d\omega^i e_i - \omega^i de_i$ timbul pertanyaan apa arti geometris dan fisis $de_i$ dan $de_i = \omega^j{}_i \, e_j$ dimana $\omega^j{}_i$ , merupakan l-form yang dinamakan koneksi l-form. Lebih lanjut, $\omega^j{}_i$ dapat dinyatakan dalam basis-basis form nya $\omega^j{}_i = \omega^j{}_{ik}\omega^k$ dalam kordinat local, $\omega^k$ dapat dinyatakan sebagai $dx^k$ dan $\omega^j{}_{ik}$ sebagai $\Gamma^j{}_{ik}$ sehingga,

$$\omega^j{}_i = \Gamma^j{}_{ik} dx^k \qquad (7.9)$$

$\Gamma^j{}_{ik}$ inilah yang dinamakan koefisien koneksi affine yang merupakan generalisasi dari symbol Christoffel dalam analisis tensor klasik.

## RENCANA PENELITIAN BERIKUTNYA

Rencana tahap berikutnya penelitian ini bersifat teoritis, teori yang digunakan ialah teori relativitas umum, teori Einstein-Cartan, teori Dirac tentang gravitasi dengan pendekatan teori tersebut, bahwa geometri ruang-waktu alam semesta dan tensor $T_0^r$disebut tensor kontravarian, dan $T_s^0$disebut tensor kovarian dimana $T_0^1(M) = T_{(p)}(M)$ dan $T_0^1(M) = T_{(p)}^*(M)$ dengan menggunakan kalkulus forms sebagai metode analitik dan geometri diferensial, untuk memadukan dan menyatukan berbagai macam konsep dalam fisika matematika melalui teori integrasi manifold, cross-product, divergensi, dan curl pada geometri Euclid 3-dimensi, teorema Stokes-Gauss, syarat integrabilitas dari sistem persamaan diferensial parsial, persamaan medan ini dapat dituliskan kembali dalam bentuk koneksi Levi-Civita tunggal dan Persamaan Dirac,

$$* \gamma \wedge \overline{\nabla}\Psi + \mathrm{m}\Psi * 1 - \mathrm{i}\frac{3\kappa}{8}(\overline{\Psi}\Psi)\Psi * 1 = 0 \tag{6.1}$$

$$g = -f^2(r)dt^2 + h^2(r)dr^2 + r^2(d\phi + a(r)dt)^2 \tag{6.2}$$

Didalam bidang koordinat polar $(t, r, \phi)$,

$$e^0 = f(r)dt, e^1 = h(r)dr, e^2 r(d\phi + a(r)dt \tag{6.3}$$

Koneksi Levi-Civita untuk I-form,

$$\widehat{\omega}_1^0 = ae^0 - \frac{\beta}{2}e^2, \widehat{\omega}_2^0 = -\frac{\beta}{2}e^1, \widehat{\omega}_2^1 = -\gamma e^2 - \frac{\beta}{2}e^0 \tag{6.4}$$

Sebagai langkah awal dalam penelitian ini, untuk solusi analitik diambil spinor Dirac yang terpengaruh pada *r* dan membuat komponennya

$$\begin{aligned} \Psi_1' + \frac{h}{2}(\alpha + \gamma)\Psi_1 + \frac{h}{4}(\beta + 3\tau + 4m)\Psi_2 &= 0 \\ \Psi_2' + \frac{h}{2}(\alpha + \gamma)\Psi_2 + \frac{h}{4}(\beta + 3\tau + 4m)\Psi_1 &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Kombinasi $\Psi_+ = \Psi_1 + \Psi_2$ dan $\Psi_- = \Psi_1 - \Psi_2$ dan menulis persamaan sistem gabungan,

$$\begin{aligned} \Psi_+' + (k_1 + k_2)\Psi_+ &= 0 \\ \Psi_-' + (k_1 - k_2)\Psi_- &= 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$k_1 = \frac{h}{2}(\alpha + \gamma), k_2 = \frac{h}{2}(\beta + 3\tau + 4m), \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= e^{-\int^r k_1 dr}\left(\xi_1 e^{-\int^r k_2 dr} + \xi_2 e^{\int^r k_2 dr}\right) \\ \Psi_2 &= e^{-\int^r k_1 dr}\left(\xi_1 e^{\int^r k_2 dr} + \xi_2 e^{-\int^r k_2 dr}\right) \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\tau(r) = i\kappa(\xi_2^*\xi_1 - \xi_1^*\xi_2)e^{-2\int^r k_1 dr} \tag{6.9}$$

Tahap berikutnya penelitian ini menyelesaikan persamaan medan Einstein yang mana telah disederhanakan untuk mengikuti sistem gabungan persamaan Dirac dan solusi eksak dari persamaan Einstein-Cartan

## DAFTAR PUSTAKA

Carmeli M.1982.*Classical Fields – General Relativity and Guage Theory*. US: Willey

E. Witten, 1986. *Physics and geometry*, Proc. Int. Cong. of Math. Berkeley, Amer. Math. Soc., 1987, Vol. 1,267-303.

http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/chern/what_is_geometry.pdf

Earman, J. 1993. *Underdeterminism, Realism and Reason*. In P. French.

Earman, J. 1989. *World Enough and Space-Time: Absolute vs. Relational Theories of Space and Time*. Cambridge, MA: MIT Press.

Feyerabend, Paul. 1975. *Against Method: Outline of an Anarchistic Theory of Knowledge*. London: Verso.

Field, H. 1989. *Realism, Mathematics and Modality*. Oxford: Blackwell.

Godel, K. 1949. *A Remark about the Relationship Between Relativity Theory and Idealistic Philosophy*. plato.stanford.edu/entries/**goedel**

Golos, K. 1968. *Faoundation of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Grene, Brian. 2014. *The Universe: Leading Scientist Explore the Origin, Mysteries, and Future of the Cosmos*. New York: Harper Publishers.

Hestenes, D. 1996. *Space-Time Algebra*. New York: Gordon and Breach

Larissa Borissova and Dmitri Rabounski. 2009. *Fields, Vacum, and the Mirror Universe*, ISBN: 978-91-85917-09-9 Printed in the United States of America.

Rietdijk, C. W. 1996. *A Rigorous Proof of Determinism Derived from the Spacial Theory of Relativity*. Philosophy of Science, XXXIII(4), 341-344.

Rovelli, Carlo. 2014. *Science is not About Certainty (universe*). New York: Harper Perennial.

Russel, Bertand. 2009. *ABC of Relativity*. Published in the Taylor & Farncis e-Library

Supelli, Karlina. 2011. Dari *Kosmologi ke Dialog*. Jakarta: Mizan Publika