

Kekuatan Ketidakteraturan Sisi Graf Rantai $C[C_n^{(m)}]$, $n = 5, 7$

Ni Luh Putu Dinna Surya Narita^{1,*}, I Nengah Suparta², I Nyoman Sukajaya³

^{1,2,3}Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Ganesha, Jalan Udayana No.11, Singaraja, Bali
*Corresponding author: dinnasuryanarita28@gmail.com

Abstrak

Graf $G(V, E)$ adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Pelabelan- k titik adalah fungsi. Graf $G(V, E)$ adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Pelabelan- k titik adalah fungsi ϕ dengan domain V dan kodomain himpunan $\{1, 2, \dots, k\}$. Pelabelan- k titik graf $G(V, E)$ $\phi: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dikatakan sebagai pelabelan- k takteratur sisi jika untuk setiap dua sisi e dan f yang berbeda pada graf G berlaku $w_\phi(e) \neq w_\phi(f)$, dimana untuk sisi $e = xy \in E(G)$ bobot $w_\phi(e)$ diperoleh dari $w_\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$. Kekuatan ketidakteraturan sisi graf G adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan- k takteratur sisi dan dinotasikan dengan $es(G)$. Graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ merupakan graf terhubung yang terdiri dari m blok graf siklus n titik, C_n , dimana setiap blok terhubung dengan maksimum dua blok lain melalui titik sekutu. Pengkajian artikel ini didasarkan pada dugaan (*conjecture*) 1 dalam artikel A. Ahmad, A. Gupta, dan R. Simanjuntak (2018); yang menyatakan bahwa untuk setiap $m \geq 2, n \geq 5, es(C[C_n^{(m)}]) = \lceil \frac{mn+1}{2} \rceil$ dengan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x . Pada artikel ini diturunkan kekuatan ketakteraturan sisi dari graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ untuk $n = 5$ dan 7 , dengan $m \geq 2$.

Kata-kata kunci: pelabelan- k titik, pelabelan- k takteratur sisi, kekuatan ketidakteraturan sisi, graf siklus, graf rantai

Abstract

Graph $G(V, E)$ is considered as a simple connected graph with vertex set V and edge set E . A vertex k -labeling is a mapping ϕ with domain V and codomain $\{1, 2, \dots, k\}$. A vertex k -labeling $\phi: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ is said to be an edge irregular k -labeling of graph G if for every two different edges e and f , $w_\phi(e) \neq w_\phi(f)$, where the weight of an edge $e = xy \in E(G)$ is $w_\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$. The edge irregularity strength of G is the minimum value of k for which G has an edge irregular k -labeling and is denoted by $es(G)$. A chain graph $C[C_n^{(m)}]$ is a connected graph of m blocks of n -

vertex cycle C_n , where each block is connected with maximum two other blocks through a common vertex. This article is based on conjecture 1 of A. Ahmad, A. Gupta, R. Simanjuntak which states that for every $m \geq 2, n \geq 5$, $es(C[C_n^{(m)}]) = \lceil \frac{mn+1}{2} \rceil$, where $\lceil x \rceil$ is the integer greater than or equal to x . Here we derive the irregularity strength of chain graphs $C[C_n^{(m)}]$ for $n = 5$ and 7 with $m \geq 2$.

Keywords: vertex k -labeling, edge irregular k -labeling, edge irregularity strength, cycle graph, chain graph.

Pendahuluan

Graf adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga titik titik (vertices) tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (edges) yang mungkin kosong, sedemikian sehingga setiap sisi di $E(G)$ adalah pasangan tak berurutan dari titik – titik di $V(G)$ (Budayasa, 2007). Banyak titik pada graf G disebut order graf yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi dari graf G disebut size graf yang dinotasikan dengan $|E(G)|$. Dalam aplikasi graf, suatu objek akan dilambangkan dengan titik, sementara hubungan antar objek tersebut dilambangkan dengan sisi.

Pelabelan adalah salah satu topik pada teori graf yang masih terus berkembang. Gallian (2019) menyatakan bahwa pelabelan graf adalah pemberian label bilangan bulat tak negatif pada titik atau sisi dengan memenuhi aturan – aturan tertentu. Pada tahun 1986, Chartrand, dkk. memperkenalkan pelabelan tak teratur suatu graf (irregular labeling), dan kekuatan ketidakteraturan sisi (*edge irregularity strength*).

Ahmad, dkk. (2014) mengungkapkan bahwa pelabelan- k titik $\phi : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ didefinisikan sebagai pelabelan- k titik takteratur sisi jika untuk tiap dua sisi yang berbeda e dan f , $w_\phi(e) \neq w_\phi(f)$, dimana bobot titik $e = xy \in E(G)$ adalah $w_\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$. Nilai k minimum pada pelabelan- k titik takteratur sisi disebut sebagai kekuatan ketidakteraturan sisi dari graf G yang dilambangkan dengan $es(G)$. Teorema yang digunakan sebagai dasar dalam menjawab kajian yang akan dilakukan adalah teorema berikut dari Ahmad, Gupta, dan Simanjuntak (2018) yang menyatakan bahwa

“Jika $G(V, E)$ adalah graf sederhana dengan derajat maksimum $\Delta(G)$, maka $es(G) \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)+1|}{2} \right\rceil, \Delta(G) \right\}$.”

Adapun selama beberapa tahun telah banyak dilakukan penelitian mengenai kekuatan ketidakteraturan sisi. Beberapa hasil dari penelitian mengenai kekuatan ketidakteraturan sisi yang telah dirumuskan adalah: Graf Lintasan P_n dengan $n \geq 2$ memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi $es(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, Graf Bintang $K_{1,n}$, dengan $n \geq 1$, memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi n dinotasikan dengan $es(K_{1,n}) = n$, Graf Bintang Ganda $S_{m,n}$, untuk $3 \leq m \leq n$, memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi $es(S_{m,n}) = nes(S_{m,n}) = n$, dan Cartesian product dari dua graf lintasan P_n dan P_m , untuk $m, n \geq 2$, memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi $es(P_n \times P_m) = \left\lfloor \frac{2mn - m - n + 1}{2} \right\rfloor$, dan (e) Corona product dari graf siklus dan m graf komplit, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi $es(C_n \odot mK_1) = \left\lfloor \frac{mn + n + 1}{2} \right\rfloor$.

Graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ merupakan graf terhubung yang terdiri dari m blok graf siklus n titik, C_n , dimana setiap blok terhubung dengan maksimum dua blok lain melalui titik sekutu. Pada tulisan ini, penulis melakukan kajian terhadap kekuatan ketidakteraturan sisi pada graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ untuk $n = 5$, dan 7 dengan bertumpu dari conjecture yang menyatakan bahwa kekuatan ketidakteraturan sisi graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ untuk $n \geq 5$ dan $m \geq 2$ adalah $\left\lfloor \frac{mn + 1}{2} \right\rfloor$ (Ahmad, dkk., 2018). Adapun alasan penulis memilih nilai $C[C_n^{(m)}]$ untuk $n = 5$ dan 7 karena graf $C[C_n^{(m)}]$ dengan $n \equiv 0 \pmod{4}$ dan $n \equiv 2 \pmod{4}$ sudah terkaji dan dibuktikan pada penelitian lain. Secara lebih tepat, penulis merumuskan penelitian ini dengan judul “Kekuatan ketidakteraturan sisi Graf Rantai $C[C_n^{(m)}]$, $n = 5$ dan 7 ”.

Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilaksanakan adalah metode kepustakaan yang merupakan deskripsi teoritis tentang objek yang diteliti dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada di berbagai sumber pustaka dalam menunjang penelitian yang bertujuan untuk menjawab *conjecture* yang akan dibahas pada hasil dan pembahasan. Penelitian ini melalui beberapa tahapan, antara lain: merumuskan masalah, merancang pelabelan, merumuskan langkah – langkah dalam mencari solusi, dan menarik kesimpulan. Rumusan masalah yang diangkat pada artikel ini adalah bagaimana

cara melabeli graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ dengan pelabelan- k titik takteratur sisi dalam menjawab *conjecture* yang diungkapkan oleh Ahmad, dkk.

Langkah – langkah awal yang dilakukan adalah memberikan notasi titik pada graf rantai, selanjutnya menentukan fungsi ϕ yang digunakan untuk melabeli titik dari graf, dan menerapkan fungsi $w_\phi(xy) = \phi(x) + \phi(y)$ dalam menghitung bobot – bobot sisi dari graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ yang sudah dilabeli sebelumnya.

Penarikan kesimpulan dilakukan melalui beberapa langkah, seperti melakukan uji coba (*trial and error*) pada beberapa kasus untuk n dan m tertentu, selanjutnya melakukan perumuman untuk kasus – kasus umum dengan cara menentukan label k minimum pada beberapa kasus m dan n tertentu sehingga sama dengan

$\left\lceil \frac{mn+1}{2} \right\rceil$, menentukan bobot sisi dengan tiap dua sisi berbeda e dan f berlaku $w_\phi(e) \neq w_\phi(f)$.

Setelah berlaku demikian, hal yang dilakukan adalah merumuskan teori – teori dalam bentuk dalil atau teorema. Demi memperjelas pembahasan selanjutnya, pada artikel ini penulis mempertegas bahwa notasi $[x]$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x , $\forall x \in \mathbb{R}$

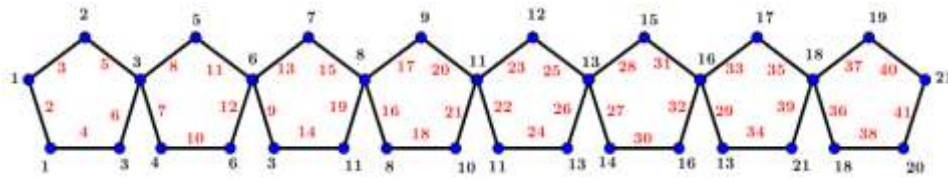
Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini menjawab secara parsial *conjecture* yang diungkapkan oleh Ahmad, dkk. pada tahun 2018. Hasil tersebut dirumuskan dalam dua teorema. Kedua teorema yang dimaksud adalah sebagai berikut,

Teorema 1. Kekuatan Ketidakteraturan Sisi Graf $C[C_5^{(m)}]$ dengan $m \not\equiv 1(\text{mod } 4)$ adalah $\left\lceil \frac{5m+1}{2} \right\rceil$.

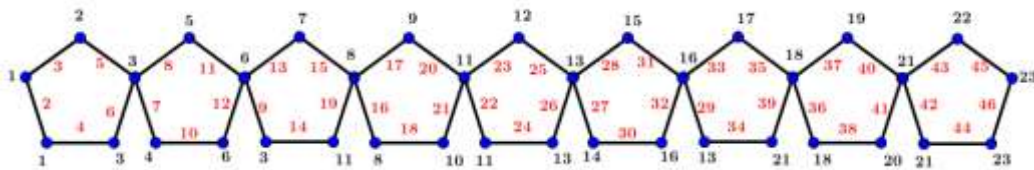
Teorema 2. Kekuatan Ketidakteraturan Sisi Graf $C[C_7^{(m)}]$ dengan $m \not\equiv 3(\text{mod } 4)$ adalah $\left\lceil \frac{7m+1}{2} \right\rceil$.

Pembuktian Teorema 1 akan dibagi menjadi 3 kasus, yaitu kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$, $m \equiv 1(\text{mod } 4)$, dan $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ dan pembuktian Teorema 2 juga dibagi menjadi 3 kasus, yaitu kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$, $m \equiv 2(\text{mod } 4)$, dan $m \equiv 3(\text{mod } 4)$. Berikut adalah contoh-contoh graf yang dilabeli takteratur yang berkaitan dengan kasus-kasus di atas.



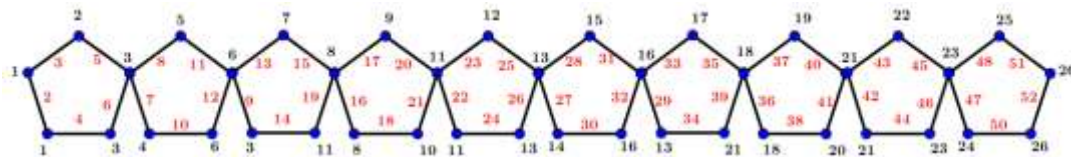
Gambar 1. Pelabelan $C[C_5^{(8)}]$ Yang Merupakan Salah Satu Graf Rantai

$m \equiv 0 \pmod{4}$ Dengan Pelabelan–21 Takteratur Sisi



Gambar 2. Pelabelan $C[C_5^{(9)}]$ Yang Merupakan Salah Satu Graf Rantai $m \equiv 1 \pmod{4}$

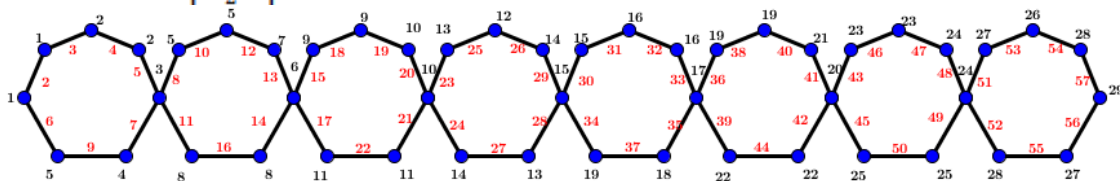
Dengan Pelabelan–23 Takteratur Sisi



Gambar 3. Pelabelan $C[C_5^{(10)}]$ Yang Merupakan Salah Satu Graf Rantai $m \equiv 2 \pmod{4}$

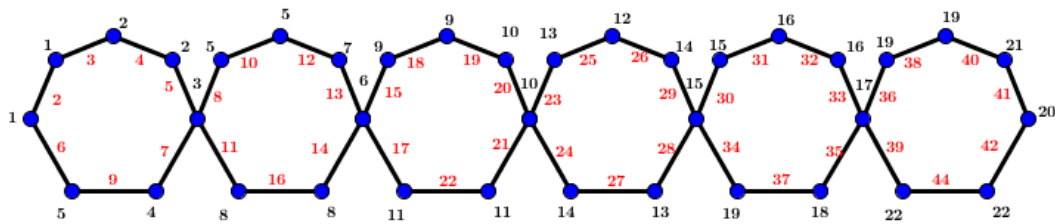
Dengan Pelabelan–26 Takteratur Sisi

Melalui pelabelan dari ketiga kasus tersebut, masing – masing graf memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi $\left\lfloor \frac{5m+1}{2} \right\rfloor$.



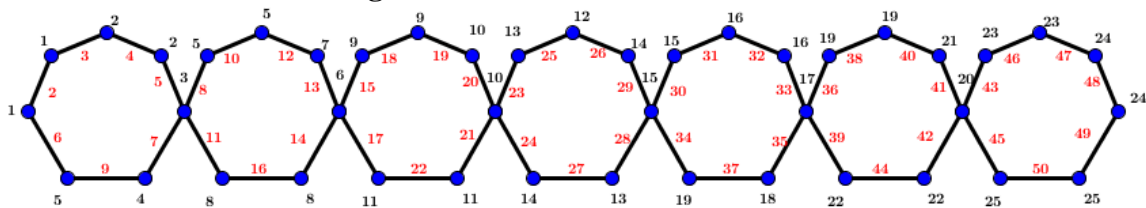
Gambar 4. Pelabelan $C[C_7^{(8)}]$ Yang Merupakan Salah Satu Graf Rantai

$m \equiv 0 \pmod{4}$ Dengan Pelabelan–29 Takteratur Sisi



Gambar 5. Pelabelan $C[C_7^{(6)}]$ Yang Merupakan Salah Satu Graf Rantai $m \equiv 2(\text{mod } 4)$

Dengan Pelabelan – 22 Takteratur Sisi



Gambar 6. Pelabelan $C[C_5^{(7)}]$ Yang Merupakan Salah Satu Graf Rantai $m \equiv 3(\text{mod } 4)$ Dengan

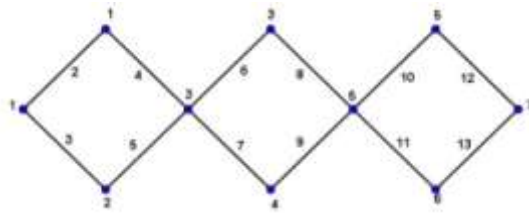
Pelabelan – 25 Takteratur Sisi

Pelabelan dari ketiga kasus tersebut, masing – masing graf memiliki kekuatan ketidakteraturan sisi

$$\left\lfloor \frac{7m+1}{2} \right\rfloor.$$

Graf *block-cut-vertex* dari suatu graf terhubung G adalah suatu graf yang titik – titiknya adalah blok dari titik potong G . Pada graf ini, dua titik dikatakan bertetangga jika dan hanya jika yang satu adalah sebuah blok di G dan titik yang lainnya adalah sebuah titik potong di G yang termuat dalam blok tersebut. Graf rantai dengan notasi $C[B_1, B_2, B_3, \dots, B_n]$ adalah sebuah graf yang terdiri atas n blok $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ sedemikian sehingga untuk setiap $1 \leq i \leq n - 1$ berlaku B_i dan B_{i+1} mempunyai suatu titik sekutu sehingga *block-cut-vertex* dari graf rantai berbentuk graf lintasan. Jika $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B$, maka dapat ditulis sebagai $C[B^{(n)}]$.

Graf rantai $C[C_n^{(m)}]$ merupakan graf rantai yang terdiri dari m graf blok C_n , dimana setiap bloknya dihubungkan oleh suatu titik sekutu. Berikut merupakan contoh dari graf rantai $C[C_4^{(3)}]$ dengan pelabelan takteratur sisi.



Gambar 7. Graf rantai $C[C_4^{(3)}]$ dengan pelabelan takteratur sisi.

Menurut Teorema yang diungkapkan oleh Ahmad,dkk. diperoleh

$$es(G) \geq \left\{ \left\lceil \frac{|E(G)| + 1}{2} \right\rceil, \Delta(G) \right\}$$

$$es(G) \geq \left\{ \left\lceil \frac{|12| + 1}{2} \right\rceil, 4 \right\}$$

$$es(G) \geq \{7,4\}$$

$$es(G) \geq 7.$$

Penulis akan menggunakan lemma 1, lemma 2, dan lemma 3 untuk memfasilitasi pembuktian dari teorema 1, dan lemma 4, lemma 5, dan lemma 6 untuk memfasilitasi pembuktian dari teorema 2. Berikut akan dilakukan pembuktian untuk Lemma 1, pembuktian untuk Lemma lainnya diabaikan. Lemma-lemma berikut dibuktikan menggunakan induksi matematika.

$$\text{Lemma 1. } \left\lceil \frac{5(4r+4)+1}{2} \right\rceil = 10r + 11$$

$$\text{Lemma 2. } \left\lceil \frac{5(4r+1)+1}{2} \right\rceil = 10r + 3$$

$$\text{Lemma 3. } \left\lceil \frac{5(4r+2)+1}{2} \right\rceil = 10r + 6$$

$$\text{Lemma 4. } \left\lceil \frac{7(4r+4)+1}{2} \right\rceil = 14r + 15$$

$$\text{Lemma 5. } \left\lceil \frac{7(4r+2)+1}{2} \right\rceil = 14r + 8$$

$$\text{Lemma 6. } \left\lceil \frac{7(4r+3)+1}{2} \right\rceil = 14r + 11$$

Pembuktian Lemma 1

Untuk $r = 1$, melalui lemma dapat diperoleh bahwa lemma tersebut benar. selanjutnya asumsikan

benar untuk bilangan bulat positif $r = s$, akan diperoleh $\left\lceil \frac{5(4s+4)+1}{2} \right\rceil = 10s + 11$. Dengan

mengambil

$$r = s + 1,$$

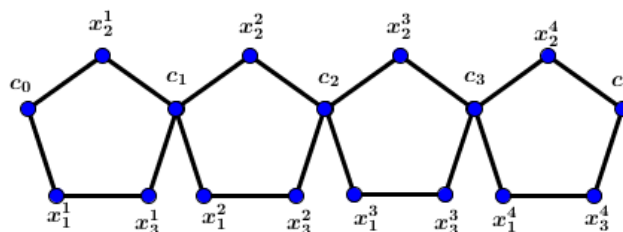
diperoleh

$$\left\lfloor \frac{5(4(s+1)+4)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5(4s+4+4)+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{20s+20+1}{2} \right\rfloor + 10 = \left\lfloor \frac{5(4s+4)+1}{2} \right\rfloor + 10 = 10r + 11, \quad \text{dengan}$$

menginduksikan asumsi. Dapat disimpulkan bahwa $\left\lfloor \frac{5(4s+4)+1}{2} \right\rfloor = 10r + 11$ untuk semua bilangan positif r .

Pembuktian teorema 1

Sebelum membuktikan secara analitik, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai *graf inti*, *graf penambah*, dan *graf turunan*. Pada artikel ini yang dimaksud dengan *graf inti* adalah graf rantai $C[C_5^{(1)}]$, $C[C_5^{(2)}]$, dan $C[C_5^{(4)}]$, *graf penambah* adalah graf rantai $C[C_5^{(4)}]$, sedangkan *graf turunan* dinotasikan dengan $C[C_5^{(m)}]'$ adalah graf yang diperoleh dari graf rantai $C[C_5^{(m)}]$ dengan tiap label titiknya ditambahkan dengan suatu konstanta dengan $es(C[C_5^{(4)}]) - 1$.



Gambar 8. Graf Penambah $C[C_5^{(4)}]$

Selanjutnya akan dibuktikan pelabelan takteratur sisi pada graf inti dan graf penambah, yaitu graf rantai $C[C_5^{(1)}]$, $C[C_5^{(2)}]$, dan $C[C_5^{(4)}]$. Adapun pendefinisian dari pelabelan titik pada graf $C[C_5^{(m)}]$ untuk $m = 1, 2$ dan 4 , yaitu sebagai berikut.

$$\phi(c_0) = 1$$

$$\phi(c_i) = \left\lfloor \frac{5i + 1}{2} \right\rfloor, 1 \leq i \leq m$$

$$\phi(x_j^i) = \begin{cases} j + 10 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor & , i = 1, 5, \dots, N^1 \\ j + 3 + 10 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor & , i = 2, 6, \dots, N^2 \\ 4j - 1 + 10 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor & , i = 3, 7, \dots, N^3 \\ j + 7 + 10 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor & , i = 4, 8, \dots, N^4 \end{cases} , j = 1, 2, 3$$

Dimana N^s adalah himpunan bilangan bulat positif kongruen $s \pmod 4$. Dari fungsi pelabelan titik di atas, bobot sisi *graf inti* dan *graf penambah* yang diperoleh adalah sebagai berikut:

$$w_{\emptyset}(c_0 x_1^1) = 2$$

$$w_{\emptyset}(c_0 x_2^1) = 3$$

$$w_{\emptyset}(c_m x_2^m) = \begin{cases} 5m & , m = 1, 3, 5, 7 \dots, N^1, N^4 \\ 5m + 1 & , m = 2, 6, 10, 14 \dots, N^2 \end{cases}$$

$$w_{\emptyset}(c_m x_3^m) = \begin{cases} 5m + 1, & m = 1, 3, 5, 7 \dots, N^1, N^4 \\ 5m + 2 & , m = 2, 6, 10, 14 \dots, N^2 \end{cases}$$

Melalui rumus pelabelan titik tersebut, dapat diketahui bahwa bobot sisi pada graf rantai $C[C_5^{(1)}], C[C_5^{(2)}]$,

dan $C[C_5^{(4)}]$ adalah himpunan bilangan bulat positif $\{2, 3, \dots, 5m, 5m + 1, 5m + 2\}$. Dengan demikian,

pelabelan tersebut adalah pelabelan- k takteratur sisi. Secara lebih tegas, berikut bukti bahwa *graf inti* dan

graf penambah $C[C_5^{(1)}], C[C_5^{(2)}]$, dan $C[C_5^{(4)}]$ adalah graf rantai dengan pelabelan- k takteratur sisi.

$$\phi(c_0) = 1$$

$$\phi(c_1) = 3$$

$$\phi(c_2) = 6$$

$$\phi(c_3) = 8$$

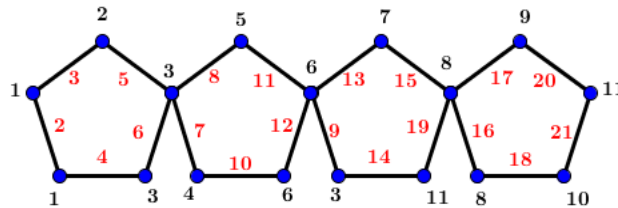
$$\phi(c_4) = 11$$

$$\{\phi(x_j^1): j = 1, 2, 3\} = 1, 2, 3$$

$$\{\phi(x_j^2): j = 1,2,3\} = 4,5,6$$

$$\{\phi(x_j^3): j = 1,2,3\} = 3,7,11$$

$$\{\phi(x_j^4): j = 1,2,3\} = 8,9,10$$



Gambar 9. Graf Rantai $C[C_5^{(4)}]$ dengan Pelabelan Takteratur Sisi.

Dengan memperhatikan kembali Gambar 9., bobot sisi dari graf rantai $C[C_5^{(4)}]$ adalah himpunan bilangan bulat positif $\{2,3, \dots, 20,21\}$. Hal tersebut menunjukkan bahwa graf rantai $C[C_5^{(4)}]$ memiliki pelabelan-11 takteratur sisi. Dengan memisalkan x adalah titik dari graf $C[C_5^{(4)}]$, notasi $l(x)$ menyatakan label dari titik x . Adapun hubungan antara *graf penambah* dengan *graf turunan* akan dijelaskan sebagai berikut.

- Hubungan antar label titik.
 Dengan memperhatikan kembali pembahasan di atas, label titik tertinggi dari graf inti adalah $es(C[C_5^{(4)}]) = \lfloor \frac{5 \cdot 4 + 1}{2} \rfloor = 11$, dan sedangkan label titik terendah dari graf turunan adalah $l(c_0) + (es(C[C_5^{(4)}]) - 1) = 1 + (11 - 1) = 11$. Diperoleh bahwa label titik c_4 dari *graf penambah* bernilai sama dengan label titik c_0 pada *graf turunan*, sehingga kedua titik tersebut dapat diidentifikasi (amalgamasi).
- Hubungan antar bobot sisi.
 Seperti pada pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa bobot sisi terbesar pada *graf penambah* yakni $5m + 1 = 21$, sedangkan bobot sisi terkecil pada graf turunan adalah,
 $(c_0x_1^1) = 2 + 2(es(C[C_5^{(4)}]) - 1) = 2 + 2(\lfloor \frac{5 \cdot 4 + 1}{2} \rfloor - 1) = 2 + 20 = 22$. Sehingga diperoleh bahwa bobot sisi terkecil dari graf turunan adalah lanjutan dari bobot sisi tertinggi pada *graf penambah*.

Jadi, terbukti bahwa *graf penambah* dapat dihubungkan dengan graf turunan melalui salah satu *vertex* dari masing – masing graf.

Pembuktian teorema 1 akan dibagi menjadi 3 kasus, yakni kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$, $m \equiv 1(\text{mod } 4)$, dan $m \equiv 2(\text{mod } 4)$. Dalam kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ yang menjadi graf inti adalah $C[C_5^{(4)}]$. Pola yang dibentuk dari $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ adalah sebagai berikut.

$$m = 4, C[C_5^{(4)}] \text{ diperoleh dari graf inti } C[C_5^{(4)}] \rightarrow r = 0$$

$$m = 8, C[C_5^{(8)}] \text{ diperoleh dari amalgamasi titik dari graf } C[C_5^{(4)}] \text{ dan } C[C_5^{(4)}]' \rightarrow r = 1$$

$$m = 12, C[C_5^{(12)}] \text{ diperoleh dari amalgamasi titik dari graf } C[C_5^{(4)}] \text{ dan } C[C_5^{(8)}]' \rightarrow r = 2$$

Jadi, graf rantai $C[C_5^{(m)}]$ diperoleh dari amalgamasi titik dari graf $C[C_5^{(4)}]$ dan $C[C_5^{(m-4)}]'$. Melalui konstruksi tersebut, diperoleh $m = 4r + 4$ dengan r merujuk pada banyaknya proses amalgamasi titik antara graf turunan dengan graf penambah untuk membentuk graf $C[C_5^{(4r+4)}]$. Selanjutnya akan ditunjukkan nilai dari kekuatan ketidakteraturan sisi dari $C[C_5^{(m)}]$ dengan $m \equiv 0(\text{mod } 4)$, $m \geq 4$.

$$es(C[C_5^{(4)}]) = \left\lfloor \frac{4 \cdot 5 + 1}{2} \right\rfloor = 11$$

$$es(C[C_5^{(8)}]) = \left\lfloor \frac{8 \cdot 5 + 1}{2} \right\rfloor = 21$$

$$es(C[C_5^{(12)}]) = \left\lfloor \frac{12 \cdot 5 + 1}{2} \right\rfloor = 31$$

Dengan memperhatikan kembali bahwa nilai dari kekuatan ketidakteraturan sisi selalu bertambah sebanyak 10. Jika dikaitkan dengan banyaknya proses amalgamasi titik antara graf turunan dengan graf penambah,

maka akan diperoleh $es(C[C_5^{(4r+4)}]) = 10r + 11$. Akibatnya, dengan menggunakan lemma 1 yaitu

$\left\lfloor \frac{5(4r+4)+1}{2} \right\rfloor = 10r + 11$ dapat disimpulkan bahwa untuk kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ akan diperoleh

$$es(C[C_5^{(m)}]) = \left\lfloor \frac{5m+1}{2} \right\rfloor.$$

Pembuktian teorema 1 pada kasus $m \equiv 1(\text{mod } 4)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ juga memiliki penyelesaian yang sama dengan kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$. Untuk kasus $m \equiv 1(\text{mod } 4)$ yang menjadi graf inti adalah $C[C_5^{(1)}]$.

Melalui konstruksi amalgamasi titik dari graf $C[C_5^{(4)}]$ dan $C[C_5^{(m-4)}]'$ diperoleh bahwa $m = 4r + 1$,

sehingga $es(C[C_5^{(4r+1)}]) = 10r + 3$. Begitu pula dengan kasus $m \equiv 2(\text{mod } 4)$, dengan graf inti

$C[C_5^{(2)}]$ dan melalui konstruksi amalgamasi titik, diperoleh bahwa $m = 4r + 2$ sehingga

$es(C[C_5^{(4r+2)}]) = 10r + 6$. Akibatnya, dengan berbantuan (1.2) dan (1.3) dapat disimpulkan bahwa kasus

$m \equiv 1(\text{mod } 4)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ akan memperoleh $es(C[C_5^{(m)}]) = \lfloor \frac{5m+1}{2} \rfloor$.

Pembuktian teorema 2

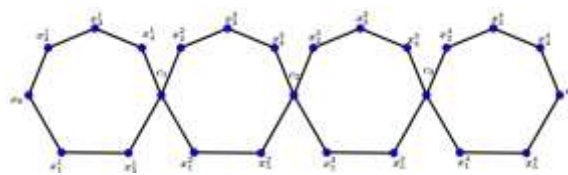
Dengan kembali menggunakan istilah mengenai graf inti, graf penambah, dan graf turunan, pada pembuktian

kali ini yang digunakan sebagai graf inti adalah graf $C[C_7^{(2)}]$, $C[C_7^{(3)}]$, dan $C[C_7^{(4)}]$, dengan graf rantai

$C[C_7^{(4)}]$ juga sebagai graf penambah. Sedangkan penjelasan mengenai graf turunan tetap sama seperti

sebelumnya, yakni dinotasikan dengan $C[C_7^{(m)}]'$ merupakan graf rantai yang diperoleh dari graf rantai

$C[C_7^{(m)}]$ dengan tiap label titiknya ditambahkan dengan suatu konstanta dengan $es(C[C_7^{(m)}]) - 1$.



Gambar 10. Graf Penambah $C[C_7^{(4)}]$

Selanjutnya akan dibuktikan pelabelan takteratur sisi pada graf inti dan graf penambah, yaitu graf rantai

$C[C_7^{(2)}]$, $C[C_7^{(3)}]$, dan $C[C_7^{(4)}]$. Adapun pendefinisian dari pelabelan titik pada graf $C[C_7^{(m)}]$ untuk

$m = 2, 3$ dan 4 , yaitu sebagai berikut.

$$\phi(c_0) = 1$$

$$\phi(c_i) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(7i-1)}{2} \right\rfloor; i \not\equiv 0(\text{mod}4) \\ \left\lfloor \frac{(7i+1)}{2} \right\rfloor; i \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

$$\phi(x_1^i) = 3i + 2 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor, 1 \leq i \leq m$$

$$\phi(x_2^i) = 4i - \left(3 + 2 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor \right), 1 \leq i \leq m$$

$$\phi(x_3^i) = \begin{cases} 7 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 5, i \equiv 1(\text{mod} 2) \\ 7 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 2, i \equiv 0(\text{mod} 2) \end{cases}$$

$$\phi(x_4^i) = \begin{cases} 2 + 14 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor, i \equiv 1(\text{mod} 4) \\ 10 + 14 \left\lfloor \frac{i}{4} \right\rfloor, i \equiv 3(\text{mod} 4) \\ 7 \left(\frac{i}{2} \right), i \equiv 0(\text{mod} 2) \end{cases}$$

$$\phi(x_5^i) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{(7i+1)}{2} \right\rfloor; i \not\equiv 0(\text{mod}4) \\ \left\lfloor \frac{(7i-1)}{2} \right\rfloor; i \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

Dari pendefinisian yang merupakan fungsi pelabelan titik tersebut, akan diperoleh bobot sisi *graf inti* dan *graf penambah* sebagai berikut.

$$w_{\emptyset}(c_0 x_1^1) = 2$$

$$w_{\emptyset}(x_2^1 x_3^1) = 3$$

$$w_{\emptyset}(c_m x_5^m) = 7m$$

$$w_{\emptyset}(x_1^m x_5^m) = \begin{cases} 7m + 2, m = 2, 6, \dots, N^2 \\ 7m + 1, m = 3, 7, \dots, N^3 \end{cases}$$

$$w_{\emptyset}(c_m x_4^m) = 7m + 1, m = 4, 8, \dots, N^4$$

Melalui rumus pelabelan titik tersebut, dapat diketahui bahwa bobot sisi pada graf rantai $C[C_7^{(2)}]$, $C[C_7^{(3)}]$,

dan $C[C_7^{(4)}]$ adalah himpunan bilangan bulat positif $\{2, 3, \dots, 7m, 7m + 1, 7m + 2\}$. Dengan demikian,

pelabelan tersebut adalah pelabelan- k takteratur sisi. Berikut bukti bahwa *graf inti* dan *graf penambah*

$C[C_7^{(2)}]$, $C[C_7^{(3)}]$, dan $C[C_7^{(4)}]$ adalah graf rantai dengan pelabelan- k takteratur sisi.

$$\phi(c_0) = 1$$

$$\phi(c_1) = 3$$

$$\phi(c_2) = 6$$

$$\phi(c_3) = 10$$

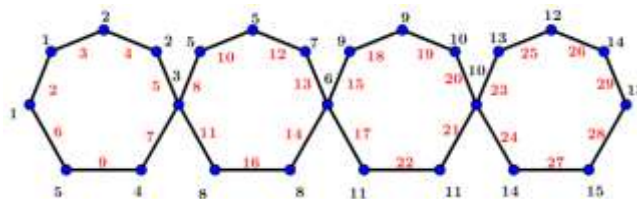
$$\phi(c_4) = 15$$

$$\{\phi(x_j^1): j = 1, 2, 3, 4, 5\} = 5, 1, 2, 2, 4$$

$$\{\phi(x_j^2): j = 1, 2, 3, 4, 5\} = 8, 5, 5, 7, 8$$

$$\{\phi(x_j^3): j = 1, 2, 3, 4, 5\} = 11, 9, 9, 10, 11$$

$$\{\phi(x_j^4): j = 1, 2, 3, 4, 5\} = 14, 13, 12, 14, 13$$



Gambar 11. Graf Rantai $C[C_7^{(4)}]$ dengan Pelabelan Takteratur Sisi.

Dengan memperhatikan kembali Gambar 11., bobot sisi dari graf rantai $C[C_7^{(4)}]$ adalah himpunan bilangan bulat $\{2,3,4, \dots, 27, 28, 29\}$. Hal tersebut menunjukkan bahwa graf rantai $C[C_7^{(4)}]$ memiliki pelabelan-15 takteratur sisi.

Graf penambah akan dihubungkan dengan graf turunan guna memperkuat pembuktian dari teorema 2.

Dengan kembali memisalkan x adalah titik dari graf $C[C_7^{(4)}]$, notasi $l(x)$ menyatakan label dari titik x . Adapun hubungan antara *graf penambah* dengan graf turunan akan dijelaskan sebagaimana berikut.

- Hubungan antar label titik

Dengan memperhatikan kembali pembahasan di atas, label titik tertinggi dari *graf inti* adalah $es(C[C_7^{(4)}]) = \left\lfloor \frac{7 \cdot 4 + 1}{2} \right\rfloor = 15$, dan sedangkan label titik terendah dari graf turunan adalah $l(c_0) + (es(C[C_7^{(4)}]) - 1) = 1 + (15 - 1) = 15$. Diperoleh bahwa label titik c_4 dari *graf penambah* bernilai sama dengan label titik c_0 pada graf turunan, sehingga kedua titik tersebut dapat diidentifikasi (amalgamasi).

- Hubungan antar bobot sisi

Seperti pada pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa bobot sisi terbesar pada *graf penambah* yakni $7m + 1 = 29$, sedangkan bobot sisi terkecil pada graf turunan adalah,

$$(c_0x_1^1) = 2 + 2(es(C[C_7^{(4)}]) - 1) = 2 + 2\left(\left\lfloor \frac{5 \cdot 4 + 1}{2} \right\rfloor - 1\right) = 2 + 28 = 30.$$

Sehingga diperoleh bahwa bobot sisi terkecil dari graf turunan adalah lanjutan dari bobot sisi tertinggi pada *graf penambah*. Hubungan antar *graf penambah* dengan graf turunan di atas sebagai bukti bahwa titik c_4 dari *graf penambah* dapat melalui proses identifikasi (amalgamasi) pada titik c_0 dari graf turunan.

Pembuktian teorema 2 akan dibagi menjadi 3 kasus, yakni kasus untuk $m \equiv 0(\text{mod } 4)$, $m \equiv 2(\text{mod } 4)$, dan $m \equiv 3(\text{mod } 4)$. Dalam kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ yang menjadi graf inti adalah $C[C_7^{(4)}]$. Pola yang dibentuk dari $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ adalah sebagai berikut.

$$m = 4, C[C_7^{(4)}] \text{ diperoleh dari graf inti } C[C_7^{(4)}] \rightarrow r = 0.$$

$m = 8, C[C_7^{(8)}]$ diperoleh dari amalgamasi titik dari graf $C[C_7^{(4)}]$ dan $C[C_7^{(4)}]'$ $\rightarrow r = 1$

$m = 12, C[C_7^{(12)}]$ diperoleh dari amalgamasi titik dari graf $C[C_7^{(4)}]$ dan $C[C_7^{(8)}]'$ $\rightarrow r = 2$

Jadi, graf rantai $C[C_7^{(m)}]$ diperoleh dari amalgamasi titik dari graf $C[C_7^{(4)}]$ dan $C[C_7^{(m-4)}]'$. Melalui konstruksi tersebut, diperoleh $m = 4r + 4$ dengan r merujuk pada banyaknya proses amalgamasi titik antara graf turunan dengan graf penambah untuk membentuk graf $C[C_7^{(4r+4)}]$. Selanjutnya akan ditunjukkan nilai dari kekuatan ketidakteraturan sisi dari $C[C_7^{(m)}]$ dengan $m \equiv 0(\text{mod } 4), m \geq 4$.

$$es\left(C[C_7^{(4)}]\right) = \left\lfloor \frac{4 \cdot 7 + 1}{2} \right\rfloor = 15$$

$$es\left(C[C_7^{(8)}]\right) = \left\lfloor \frac{8 \cdot 7 + 1}{2} \right\rfloor = 29$$

$$es\left(C[C_7^{(12)}]\right) = \left\lfloor \frac{12 \cdot 7 + 1}{2} \right\rfloor = 43$$

Dengan memperhatikan kembali bahwa nilai dari kekuatan ketidakteraturan sisi selalu bertambah sebanyak 14. Jika dikaitkan dengan banyaknya proses amalgamasi titik antara graf turunan dengan graf penambah, maka akan diperoleh $es\left(C[C_7^{(4r+4)}]\right) = 14r + 15$. Akibatnya, dengan menggunakan (1.4)

yaitu $\left\lfloor \frac{7(4r+4)+1}{2} \right\rfloor = 14r + 15$ dapat disimpulkan bahwa pada kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$ akan diperoleh

$$es\left(C[C_7^{(m)}]\right) = \left\lfloor \frac{7m+1}{2} \right\rfloor.$$

Pembuktian teorema 2 pada kasus $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ dan $m \equiv 3(\text{mod } 4)$ kembali memiliki penyelesaian yang sama dengan kasus $m \equiv 0(\text{mod } 4)$. Untuk kasus $m \equiv 2(\text{mod } 4)$ yang menjadi graf inti adalah $C[C_7^{(2)}]$. Melalui konstruksi amalgamasi titik dari graf $C[C_7^{(4)}]$ dan $C[C_7^{(m-4)}]'$ diperoleh bahwa $m = 4r + 2$, sehingga $es\left(C[C_7^{(4r+2)}]\right) = 14r + 8$. Begitu pula dengan kasus $m \equiv 3(\text{mod } 4)$, dengan graf inti $C[C_7^{(3)}]$ dan melalui konstruksi amalgamasi titik, diperoleh $m = 4r + 3$ sehingga

$es\left(C\left[C_7^{(4r+3)}\right]\right) = 10r + 11$. Akibatnya, dengan berbantuan (l.5) dan (l.6) dapat disimpulkan bahwa kasus $m \equiv 2(\bmod 4)$ dan $m \equiv 3(\bmod 4)$ akan memperoleh $es\left(C\left[C_7^{(m)}\right]\right) = \left\lfloor \frac{7m+1}{2} \right\rfloor$.

Penutup

Berdasarkan hasil pada pembahasan mengenai *kekuatan ketidakteraturan sisi* graf rantai $C\left[C_n^{(m)}\right]$ untuk $n = 5$ dan 7 , telah dibuktikan dan diperoleh hasil bahwa graf rantai tersebut adalah graf rantai dengan *kekuatan ketidakteraturan sisi* $es\left(C\left[C_n^{(m)}\right]\right) = \left\lfloor \frac{mn+1}{2} \right\rfloor$ untuk nilai-nilai m yang relevan. Yang dimaksudkan nilai-nilai m yang relevan adalah bahwa pada graf rantai $C\left[C_5^{(m)}\right]$ tidak berlaku untuk nilai $m \equiv 3(\bmod 4)$, dan pada graf rantai $C\left[C_7^{(m)}\right]$ tidak berlaku untuk nilai $m \equiv 1(\bmod 4)$. Adapun saran yang dapat disampaikan adalah pembahasan mengenai *kekuatan ketidakteraturan sisi* graf rantai ini masih terbuka bagi penulis lain untuk melanjutkan penelitian ini pada aplikasinya dan bisa juga mengadakan penelitian yang sejenis dengan jenis – jenis graf yang berbeda.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih kepada: (1) segenap dosen dan staf di Program Studi S1 Pendidikan Matematika Undiksha, yang telah banyak memberikan bimbingan, masukan, bantuan serta motivasi kepada penulis dalam melaksanakan penelitian. (2) keluarga dan orang dekat penulis yang selalu memberikan doa, bantuan, dukungan serta kepercayaan kepada penulis yang selalu menjadi semangat penulis.

Daftar Pustaka

- Ahmad A., Gupta A., Simanjuntak R. 2018. "Computing the edge irregularity strengths of chain graphs and the join of two graphs". Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Ahmad A., "Computing the edge irregularity strength of certain unicyclic graphs".
- Ahmad A., Bača M., Nadeen M.F. 2016. "On edge irregularity strength of Toeplitz graphs". Romania: *U.P.B. Scientific Bulletin*. (155-162)
- Al-Mushayt O., "On the edge irregularity strength of products of certain families".
- Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Fauziah, G.N. 2017. "On Edge Irregular Total Labelling Algorithm of Cycle Chain Graphs". Makasar: Universitas Hasanudin.

- Gallian, J.A. 2017. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. Duluth: University of Minnesota Duluth.
- Imran, M., Aslam, A., Zafar, S., dan Nazeer, W, 2017. "Further result on edge irregularity strength of graphs". *Indonesian Journal of Combinatorics*. 82-91.
- Musafi I., Saif N. 2013. *Pengantar Kombinatorika Dan Teori Graf*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Munir R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Ruohonen Keijo, *Graph Theory*, (2013)
- Tarawneh I., Hasni R., Ahmad A., 2016. "On the edge irregularity strength of corona product of graphs with paths". *Applied Mathematics E-Noted*. 80-87.
- Tarawneh I., Hasni R., Ahmad A., 2016. "On the edge irregularity strength of corona product of cycle with isolated vertices". *AKCE Internat. J. Graphs Combinatory*. 213-217.
- Suparta, I Nengah., dan I.G.P Suharta, 2020. "A Note on Edge Irregularity Strength of Some Graphs". *Indonesian Journal of Combinatorics*. 10-20.