

Simulasi *Sloshing* 2D pada Kontainer Segi Empat dengan Metode Beda Hingga Berbasis *Staggered Grid*

Kevin Boy Gunawan^{1*}, Rida S. N. Mahmudah², Azizul Khakim³ 

^{1,2} Program Studi Fisika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia

³ Badan Pengawas Tenaga Nuklir, Jakarta, Indonesia

ARTICLE INFO

Article history:

Received November 22, 2021

Revised November 29, 2021

Accepted July 22, 2022

Available online October 25, 2022

Kata Kunci:

Sloshing, Navier-Stokes, Artificial Compressibility, Beda Hingga, Volume of Fluid

Keywords:

Sloshing, Navier-Stokes, Artificial Compressibility, Finite Difference, Volume of Fluid



This is an open access article under the [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license.

Copyright © 2022 by Author. Published by Universitas Pendidikan Ganesha.

ABSTRAK

Konsep dinamika fluida sering diaplikasikan dalam penyelesaian masalah di kehidupan sehari-hari, salah satunya gerakan *sloshing* pada kontainer yang berisi cairan. Penelitian ini bertujuan untuk menyusun sebuah *code* simulasi *sloshing* pada kontainer segi empat dengan menggunakan persamaan Navier-Stokes dua dimensi. Persamaan Navier-Stokes didiscretisasi dengan ACM (*Artificial Compressibility Method*) dan metode beda hingga berbasis *staggered grid*. ACM digunakan untuk memperoleh nilai dari komponen kecepatan dan tekanan sedangkan metode beda hingga digunakan dalam proses diskritisasi untuk melakukan pendekatan secara numerik. Karena dalam kasus ini melibatkan aliran multifase, maka metode lain seperti VOF (*Volume of Fluid*) juga digunakan untuk menentukan permukaan bebas fluida. Hasil penelitian ini divalidasi dengan simulasi pembandingan menggunakan Ansys, dan menunjukkan kesesuaian yang cukup baik secara kuantitatif maupun kualitatif. Secara kuantitatif, nilai RMSE (*Root Mean Square Error*) relatif sangat kecil dengan RMSE maksimum adalah 0,235 dan RMSE minimum adalah 0,030. Sedangkan secara kualitatif, fase gerak antara kedua simulasi menunjukkan kesamaan. Dengan mengubah beberapa parameter simulasi, diketahui bahwa RMSE paling minimum diperoleh saat nilai $dx = 0,08$ dan $dy = 0,0143$.

ABSTRACT

The concept of fluid dynamics is often applied in solving problems in everyday life, one of which is the sloshing motion of a container partially filled with liquid. This study aims to develop a sloshing simulation code on a rectangular container using the two-dimensional Navier-Stokes equation. The Navier-Stokes equation is solved by ACM (*Artificial Compressibility Method*) and a staggered grid-based finite difference method. ACM is used to obtain the values of the velocity and pressure components while the finite difference method is used in the discretization process to get numerical approach. Since this case involves multiphase flow, other methods such as VOF (*Volume of Fluid*) are also used to determine the free surface of the fluid. The results of this study were validated by comparative simulation using Ansys, and showed a fairly good agreement, both quantitatively and qualitatively. Quantitatively, the RMSE (*Root Mean Square Error*) value is relatively very small with a maximum RMSE of 0.235 and a minimum RMSE of 0.030. While qualitatively, the moving phase between the two simulations shows similarities. By changing several simulation parameters, it is known that the minimum RMSE is obtained when the values of $dx=0.08$ and $dy=0.0143$.

1. PENDAHULUAN

Dinamika fluida merupakan salah satu cabang keilmuan yang mempelajari tentang pergerakan fluida beserta interaksinya dengan lingkungan di sekitarnya. Dinamika fluida meliputi berbagai macam aspek yang luas dalam kehidupan manusia sehingga sangat banyak penerapannya dalam kehidupan sehari-hari (Kusumastuti, 2014; Trimulyono & Wicaksono, 2018). Sebagai contoh di lapangan, beberapa sektor industri seperti nuklir dan otomotif melibatkan banyak prinsip dinamika fluida di dalamnya. Dalam bidang nuklir, salah satu penerapan dinamika fluida adalah untuk membantu merancang reaktor nuklir agar dapat beroperasi dengan aman. Kemudian dalam bidang otomotif, prinsip dinamika fluida juga digunakan untuk melakukan rancang bangun dari desain kendaraan beserta mesin yang ada di dalamnya sekaligus (Kurniawan, 2017; Rasagama, 2020). Penerapan dinamika fluida tidak terbatas hanya di sektor industri saja, sektor lain seperti masalah cuaca dan bencana juga gencar memanfaatkan prinsip dinamika fluida dalam melakukan prediksi dan mempelajari fenomena yang ada di atmosfer (Eka Lutfi Septiani, 2017).

*Corresponding author.

E-mail addresses: kevinboy.2017@student.uny.ac.id (Kevin Boy Gunawan)

Beberapa hal di atas merupakan alasan pentingnya mempelajari dinamika fluida. Mempelajari ilmu ini akan sangat membantu untuk mengenali sifat dan perilaku fluida, sehingga dapat dipahami bagaimana cara menghadapi beragam persoalan yang melibatkan fluida (Iswanti & Dwikoranto, 2015; Pratiwi & Yulkifli, 2019).

Ilmu dinamika fluida melibatkan sebuah persamaan matematis populer yang disebut dengan persamaan Navier-Stokes, yang merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier orde dua yang kompleks dengan satu atau lebih turunan-turunan parsial (Hapsoro dan Srigutomo, 2013). Dalam penerapannya, sangat jarang dan sulit didapatkan model analitik dari persamaan Navier-Stokes, sehingga dibutuhkan metode numerik untuk menyelesaikan persamaan ini. Ada beberapa metode yang tersedia untuk menyelesaikan persamaan Navier-Stokes secara numerik, antara lain metode beda hingga, volume hingga, dan elemen hingga.

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang paling tua dan paling sederhana. Selain mudah dipelajari, metode beda hingga juga salah satu metode numerik yang stabil, cepat konvergen, dan akurat untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial (Awanda, Oktafianto, Arifin, & Fatimah, 2019; Zeneli, Aris, & Sotirios, 2020). Metode ini pertama kali digagas oleh L. Euler pada tahun 1768 yang kemudian dikembangkan secara dua dimensi oleh C. Runge pada tahun 1908. Metode beda hingga mencakup aplikasi yang sangat luas dalam dunia sains dan teknologi sehingga banyak persoalan matematika yang sulit dipecahkan secara analitis dapat diselesaikan dengan metode ini. Beberapa kasus yang umum dijumpai seperti transfer panas, gelombang, analisis struktur hingga kasus aliran fluida dapat diselesaikan secara mudah menggunakan metode ini (Mawarsih, 2017). Dalam aplikasinya saat ini, sudah banyak perangkat lunak yang diciptakan untuk keperluan analisa dan simulasi aliran fluida. Beberapa contoh perangkat lunak CFD (*Computational Fluids Dynamic*) yang paling umum dan sering digunakan dalam dunia industri dan penelitian antara lain seperti Mentor Graphics, Altair Engineering, Comsol, Numeca International, Ansys, Autodesk dan EXA (Georgieva, D., & T., 2021). Mayoritas perangkat lunak CFD ini tidak gratis dan harga lisensinya cukup mahal. Harga yang mahal ini membuat perangkat lunak CFD sangat eksklusif, tidak semua orang dapat menggunakan dan/atau mempelajarinya. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menciptakan *code* untuk menyelesaikan permasalahan dinamika fluida menggunakan persamaan Navier-Stokes khususnya masalah *sloshing* pada aliran fluida.

Sloshing atau dalam Bahasa Indonesia diartikan sebagai mondar-mandir, merupakan gerakan fluida yang khas apabila sebuah fluida ditempatkan dalam wadah dan kemudian wadah tersebut dikenai gaya sehingga membuat fluida di dalamnya terguncang dan bergerak ke sana kemari (Nugraha & Murdjito, 2020; Rahardjo, Trimulyono, & Scopus, 2021). Gerakan *sloshing* sangat umum dijumpai dalam kehidupan sehari-hari dan giat dipelajari oleh para ahli. Salah satu contoh kasus dari gerak *sloshing* fluida adalah cairan bahan bakar di dalam kontainer truk yang sedang melaju.

Mouhamadou Dosso dan Emile Danho melakukan penelitian berupa simulasi untuk permasalahan *sloshing* pada kontainer berbentuk kotak. Dalam penelitian tersebut kontainer yang berdimensi 3,2 m x 2 m dengan air di dalamnya setinggi 0,6 meter dikenai gaya yang memenuhi persamaan gerak harmonik pada arah horizontal. Pendekatan yang digunakan pada penelitian tersebut adalah melibatkan penyelesaian persamaan Navier-Stokes dengan metode volume hingga, metode VOF (*Volume of Fluid*) dan skema *coupling implicit-explicit time*.

Dalam penelitian ini digunakan tiga metode sekaligus, yaitu metode beda hingga, ACM, dan VOF. Metode beda hingga digunakan dalam proses diskritisasi dalam upaya melakukan pendekatan secara numerik, dengan cara memecah domain menjadi bagian-bagian kecil yang disebut sebagai *grid* (Awanda et al., 2019; Kim, Dey, Oshima, & Lee, 2018). Tiap-tiap *grid* tersebut akan menampung informasi atau variabel tertentu di mana dalam kasus ini variabel tersebut berupa kecepatan, tekanan, fraksi volume dan properti fluida.

Kemudian untuk memperoleh komponen kecepatan dan tekanan digunakan metode *artificial compressibility*. Metode ini diperkenalkan oleh Chorin pada tahun 1997 di salah satu jurnal ilmiahnya yang berjudul '*A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems*'. Metode *artificial compressibility* memberikan sebuah pendekatan yang sangat mudah untuk memecahkan masalah tekanan pada persamaan Navier-Stokes dengan cara menambahkan turunan tekanan *pseudo-time* ke dalam persamaan kontinuitas. Sistem persamaan yang sudah dimodifikasi tersebut kemudian dapat diiterasi dalam waktu semu (*pseudo-time*) hingga divergensi bebas aliran terpenuhi.

Kasus *sloshing* merupakan bagian dari kasus aliran multifase (aliran cair dan gas), sehingga dibutuhkan metode VOF untuk menghitung daerah permukaan bebas, atau daerah batas antara fase cair dan gas (Man et al., 2020; Mursito, Hadi, & Manik, 2019; Rahardjo et al., 2021). Berbeda dengan kasus aliran satu fase, untuk kasus aliran multifase perlu adanya sebuah metode yang dapat terus melacak masing-masing fase di setiap ruang atau *grid* dari domain simulasi. Untuk melacak masing-masing fase dalam *grid*,

dibutuhkan dua buah nilai yang masing-masing nilai merepresentasikan keadaan atau fase fluida yang berada di *grid* tersebut (Gui & Jiang, 2014; Kusumastuti, 2014).

Pada penelitian ini, dibuat *code* simulasi gerak *sloshing* pada aliran fluida di dalam kontainer berbentuk kotak yang diberi gangguan. *Code* simulasi ini dibuat dengan menggunakan software MATLAB. Hasil simulasi tersebut kemudian akan divalidasi menggunakan simulasi pembandingan yang disimulasikan oleh perangkat lunak komersil khusus CFD. Beberapa parameter diuji cobakan pada *code* yang dibangun agar diperoleh tingkat validitas yang tinggi. Diharapkan *code* awal yang dibuat ini dapat dikembangkan lebih lanjut untuk mensimulasikan kasus dinamika fluida lain yang diatur oleh persamaan Navier-Stokes.

2. METODE

Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika dalam kasus ini didasarkan atas prinsip fundamental fisika yaitu kekekalan massa, momentum dan kekekalan fraksi volume. Persamaan Navier-Stokes tak berdimensi untuk kasus fluida *multiphase, incompressible, unsteady* dan *viscous* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{U} \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\nabla F) = 0 \tag{3}$$

Di mana \vec{U} adalah vektor kecepatan komponen x dan y , p adalah tekanan, Re adalah bilangan Reynolds, dan ∇ adalah operator nabla.

Gerak *sloshing* hanya akan timbul jika fluida yang semulanya tenang kemudian diguncang atau diberikan gaya eksternal. Dalam penelitian ini, kontainer kotak berisi fluida dengan dimensi yang dapat dilihat pada Gambar 1, ditranslasi pada arah horizontal yang pergerakannya mengikuti persamaan gerak harmonik sesuai dengan persamaan (4), dimana periode (T) dan amplitudo (A) yang digunakan dalam penelitian ini secara berturut-turut adalah 2,5 s dan 0,1 m.

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \tag{4}$$

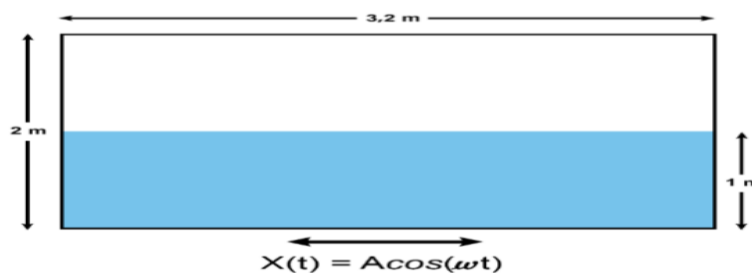
Persamaan gerak *sloshing* pada fluida dapat diperoleh dengan memasukkan parameter gaya luar ke dalam persamaan (2). Sehingga persamaan umum untuk *sloshing* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\nabla \vec{u} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} \vec{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \vec{g}_y + \vec{a}_x \tag{6}$$

Dengan \vec{g}_y merupakan percepatan gravitasi bumi dengan besar $9,8 \text{ m/s}^2$ dan \vec{a}_x adalah percepatan arah horizontal oleh gaya luar dengan nilai \vec{a}_x yang diperoleh dengan menurunkan persamaan (4), sehingga:

$$\vec{a}_x = A \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \tag{7}$$



Gambar 1. Desain Aliran Untuk Gerak *Sloshing*

Kondisi Batas

Syarat batas yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 u &= 0 \text{ di } x = 0 \text{ dan } x = 3,2 \\
 v &= 0 \text{ di } y = 0 \text{ dan } y = 2 \\
 \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \text{ di } x = 0 \text{ dan } x = 3,2 \\
 \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \text{ di } y = 0 \text{ dan } y = 2 \\
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \text{ di } x = 0 \text{ dan } x = 3,2 \\
 \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \text{ di } y = 0 \text{ dan } y = 2
 \end{aligned}$$

Pemodelan Numerik

Dalam penelitian ini, pemodelan numerik untuk menyelesaikan persamaan (3), (5) dan (6) di atas dilakukan menggunakan tiga metode, yaitu metode beda hingga untuk proses diskritisasi, ACM, dan metode VOF.

Metode *Artificial Compressibility*

Aliran *incompressible* dengan massa jenis konstan dapat dijabarkan menggunakan persamaan kontinuitas dan momentum seperti pada persamaan (1) dan (2). Dalam kedua persamaan tersebut terdapat variabel yang tidak terkait satu sama lain, yaitu tidak adanya variabel tekanan (p) pada persamaan (1). Dalam metode lain seperti metode SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*), hal semacam ini dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan Poisson untuk tekanan. Namun, metode *Artificial Compressibility* mengenalkan sedikit modifikasi untuk memunculkan variabel p pada persamaan kontinuitas. Hal tersebut dapat dilakukan dengan menambahkan turunan *pseudo-time* dari tekanan pada persamaan tersebut sehingga persamaan (1) dapat diubah menjadi.

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{U} = 0 \tag{8}$$

Di mana δ merupakan parameter dari *Artificial Compressibility* dan nilainya perlu dipilih dengan tepat agar memperoleh perhitungan numerik yang konvergen. Kemudian persamaan (6) dan (8) dapat dijabarkan lebih lanjut sebagai berikut.

a. Persamaan Momentum

Momentum-x

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \vec{u}\vec{v}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} \right] + \vec{a}_x \tag{9}$$

Momentum-y

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{u}\vec{v}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \right] + \vec{g} \tag{10}$$

b. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{1}{\delta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

Dengan menggunakan metode beda hingga berbasis *staggered grid*, maka suku-suku persamaan di atas dapat didiskritisasi menjadi persamaan-persamaan berikut.

Suku Persamaan Momentum-x

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^2}{\partial x} = \frac{\left(u_{i,j+\frac{1}{2}}^n\right)^2 - \left(u_{i,j-\frac{1}{2}}^n\right)^2}{2\Delta x} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \vec{u}\vec{v}}{\partial y} = \frac{\left(\frac{u_{i,j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2}\right)\left(\frac{v_{i,j}^n + v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{2}\right) - \left(\frac{u_{i,j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{2}\right)\left(\frac{v_{i-\frac{1}{2},j}^n + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n}{2}\right)}{\Delta y} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial x^2} = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta y^2} \quad (16)$$

Suku Persamaan Momentum-y

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^2}{\partial y} = \frac{\left(v_{i+\frac{1}{2},j}^n\right)^2 - \left(v_{i-\frac{1}{2},j}^n\right)^2}{2\Delta y} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \vec{u}\vec{v}}{\partial x} = \frac{\left(\frac{u_{i,j}^n + u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2}\right)\left(\frac{v_{i,j}^n + v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{2}\right) - \left(\frac{u_{i,j-\frac{1}{2}}^n + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{2}\right)\left(\frac{v_{i,j}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{2}\right)}{\Delta x} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} = \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} = \frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta y^2} \quad (21)$$

Suku Persamaan Kontinuitas.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (23)$$

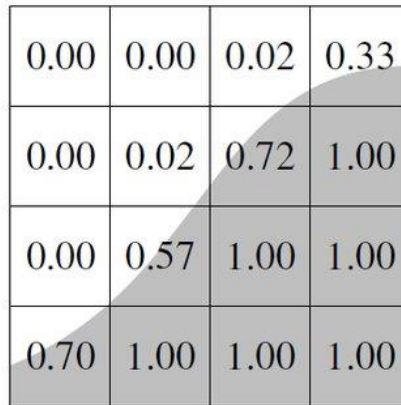
Metode Volume of Fluid

Volume of fluid merupakan sebuah metode yang digunakan untuk memodelkan permukaan bebas pada fluida. Dalam metode ini, digunakan fungsi fraksi volume yang dinotasikan sebagai F dan merupakan fungsi *step* dengan nilai satu dan nol. Pada kasus aliran cair dan gas, nilai F sama dengan satu digunakan untuk mempresentasikan fase cair sedangkan nilai nol untuk mempresentasikan fase gas. Persamaan untuk fraksi volume dapat dijabarkan sebagai berikut;

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{v} \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$F = \begin{cases} F = 0 \rightarrow \text{gas} \\ F = 1 \rightarrow \text{cair} \end{cases} \quad (25)$$

dimana \vec{u} adalah vektor kecepatan arah sumbu x dan \vec{v} adalah vektor kecepatan arah sumbu y .



Gambar 2. Fraksi Volume Cair dan Gas

(Sumber: Kim Motoyoshi Kalland, 2008)

Gambar 2 di atas menunjukkan fungsi warna dari fraksi volume di mana *grid* dengan nilai $F = 1$ ditempati oleh fase cair dan *grid* dengan nilai $F = 0$ ditempati oleh fase gas, sedangkan untuk *grid* dengan nilai $0 < F < 1$ merupakan daerah permukaan bebas.

Setelah mengetahui fase fluida yang menduduki suatu *grid*, maka properti fluida tersebut disesuaikan berdasarkan fraksi volumenya dengan menggunakan persamaan sebagai berikut, dengan ρ adalah massa jenis, μ adalah viskositas dinamik, sedangkan subskrip G dan C secara berturut-turut merepresentasikan fase gas dan cair. Selanjutnya dalam penelitian ini, properti fluida yang digunakan tersaji pada Tabel 1.

$$\rho = \rho_G(1 - F) + \rho_C F \quad (26)$$

$$\mu = \mu_G(1 - F) + \mu_C F \quad (27)$$

Tabel 1. Properti Fluida

Fase Fluida	Massa Jenis (kg/m ³)	Viskositas Dinamik (kg/m.s)
Cair	100	1,71
Gas	1,293	0,0198

Persamaan fraksi volume seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (24) didiskritisasi menggunakan kombinasi dua skema, yaitu beda maju dan beda mundur. Gabungan antar dua metode tersebut menghasilkan persamaan di bawah ini.

$$\vec{u} \frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{1}{2} (\vec{u} + |\vec{u}|) \frac{F_{i,j}^n - F_{i,j-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} (\vec{u} - |\vec{u}|) \frac{F_{i,j+1}^n - F_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (28)$$

$$\vec{v} \frac{\partial F}{\partial y} \approx \frac{1}{2} (\vec{v} + |\vec{v}|) \frac{F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n}{\Delta y} + \frac{1}{2} (\vec{v} - |\vec{v}|) \frac{F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (29)$$

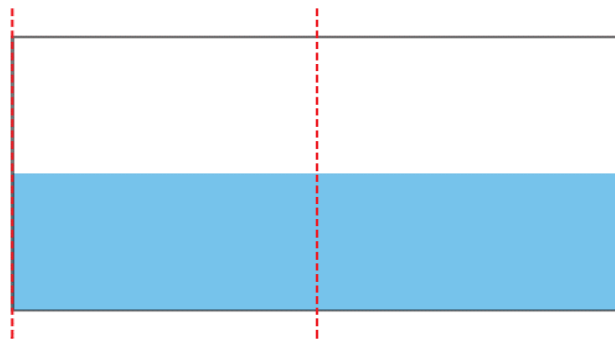
Penggabungan dua skema di atas dilakukan karena \vec{u} dan \vec{v} merupakan komponen vektor kecepatan yang nilainya bisa positif atau negatif. Skema mundur hanya akan valid jika nilai \vec{u} dan \vec{v} lebih besar dari nol (bernilai positif) dan sebaliknya, skema maju hanya akan valid jika nilai \vec{u} dan \vec{v} lebih kecil

dari nol (bernilai positif). Jika hanya satu skema saja yang dilakukan, maka *code* tidak akan berjalan dengan baik.

Untuk memastikan kevalidan *code* yang telah dibuat dengan MATLAB, dilakukan simulasi yang sama sebagai pembandingan dengan menggunakan Ansys. Ansys merupakan sebuah paket *software* yang berfungsi untuk memodelkan dan menganalisis fenomena-fenomena fisika. Ansys secara umum menyediakan dua metode numerik yang dapat digunakan, yaitu *solver* berbasis tekanan dan *solver* berbasis massa jenis. Untuk proses diskritisasinya, *software* ini menggunakan metode volume hingga.

Penelitian ini memilih Ansys sebagai simulator pembandingan karena studi dalam salah satu artikel yang berjudul “*Analysis of The Capabilities of Software Products to Simulate The Behavior of Dynamic Fluid Flows*”, mengemukakan bahwa Ansys merupakan salah satu perangkat lunak CFD terbaik dalam dunia industri dan penelitian. Ansys merupakan *software* CFD komersial yang paling banyak digunakan dalam penelitian yang dipublikasi di Scopus, dengan total presentase sebesar 40% yang kemudian disusul dengan *software* OpenFOAM dengan presentase 23% (Georgieva et al., 2021).

Analisis data dilakukan dengan membandingkan kesamaan fase gerak antara simulasi yang dihasilkan dari *code* penelitian ini dan simulasi Ansys. Selain itu, dilakukan juga perbandingan ketinggian permukaan air di tiga posisi yaitu dinding kanan, tengah dan dinding kiri. Simulasi dengan *code* ini dilakukan berulang kali dengan memvariasikan nilai dx , dy , dan dt . Untuk setiap variasi, diambil 100 buah data ketinggian air untuk rentang waktu simulasi selama 10 detik. Daerah ketiga titik pengukuran dalam penelitian ini ditunjukkan oleh garis putus-putus warna merah seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Posisi Daerah Pengukuran

Perbedaan ketinggian dari kedua simulasi dapat dianalisis dengan menghitung nilai *error* menggunakan RMSE (*Root Mean Square Error*) yang memenuhi persamaan berikut, dimana \hat{h}_i adalah ketinggian permukaan air simulasi Ansys, h_i adalah ketinggian permukaan air dari simulasi penelitian ini dan N adalah jumlah total data.

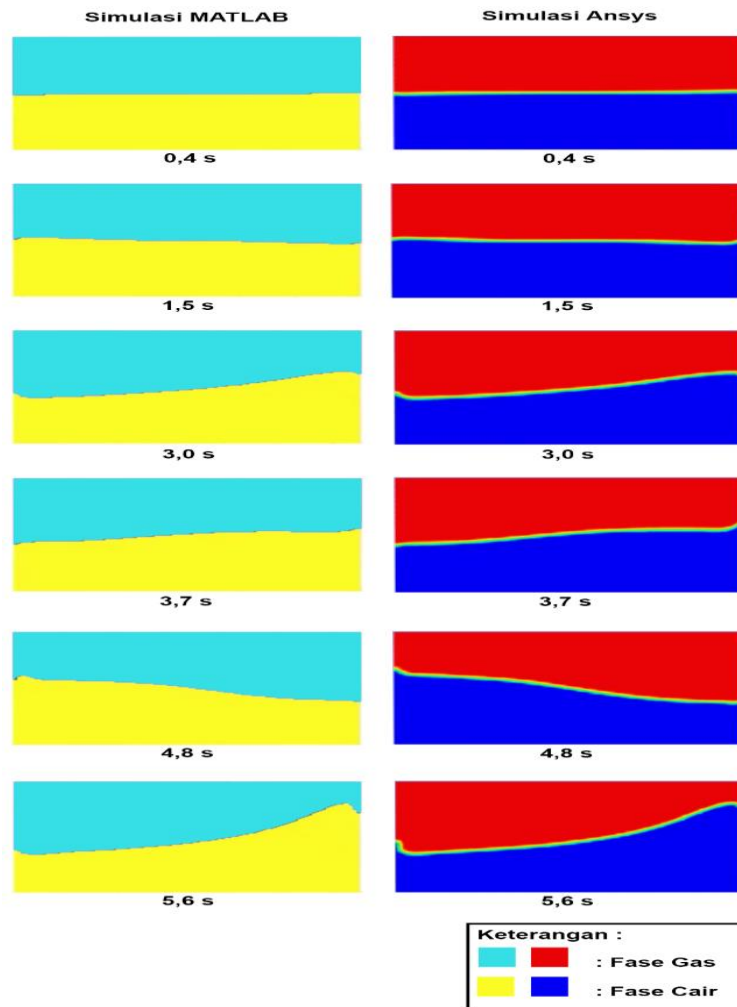
$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{h}_i - h_i)^2}{N}} \quad (30)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Secara kualitatif, perbandingan hasil antara hasil simulasi *code* yang dibangun menggunakan MATLAB dan Ansys dapat dilihat pada Gambar 4.

Kedua simulasi ini diselesaikan dengan metode dan spesifikasi yang berbeda. Simulasi Ansys menggunakan *solver* berbasis tekanan dan skema PISO (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*) dengan nilai $dt = 0,01$. Geometri yang digunakan adalah berbentuk *quad* atau persegi dengan jumlah *face* arah horizontal sebanyak 80 *faces* dan arah vertikal sebanyak 50 *faces* sehingga total *face* keseluruhan adalah 4000 *faces*. Spesifikasi tersebut akan digunakan untuk semua simulasi Ansys dalam penelitian ini. Sedangkan untuk simulasi MATLAB berikut, diperoleh dengan nilai $dt = 0,0001$ dan jumlah $grid_x = grid_y$ adalah 101 *grid*.



Gambar 4. Perbandingan Antara Hasil Simulasi MATLAB dengan Ansys

Jika diamati secara kualitatif, kedua simulasi pada Gambar 4 di atas menunjukkan kecocokan gerak yang sangat baik dari waktu ke waktu. Pada detik 0,4 s saat kontainer mulai bergerak dari kanan ke kiri, terlihat permukaan fluida pada kedua simulasi mulai membentuk sedikit kemiringan dengan tingkat kemiringan yang sekilas hampir sama. Pada detik 1,5 s fase gerakan fluida mulai berbalik arah dengan sudut kemiringan yang mulai signifikan. Kemudian semakin berjalannya waktu, fluida di dalam kontainer mulai aktif bergerak, yang dapat dilihat pada detik 5,6 s. Pada detik tersebut, fluida mencapai kemiringan yang cukup ekstrim sehingga hampir mencapai atap kontainer.

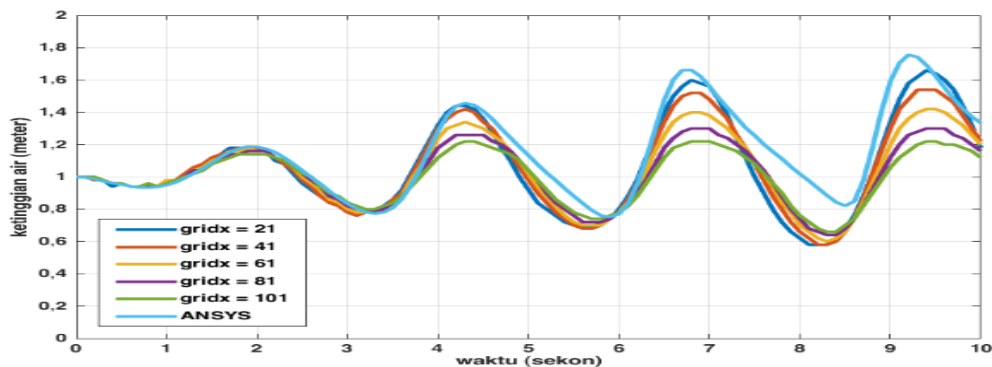
Jika diamati lebih lanjut ada hal yang berbeda dari kedua simulasi tersebut terutama saat fluida mulai aktif bergerak. Pada simulasi Ansys detik ke 5,6 s terlihat pada dinding kiri, fluida di dinding masih menempel dan turun dengan sangat lambat. Berbeda halnya dengan simulasi MATLAB, pada detik yang sama tidak ada fluida yang menempel di dinding kiri. Temuan ini kemudian mengarahkan kepada dugaan bahwa apakah parameter *gridx*, *gridy*, dan *dt* mengambil pengaruh besar dari penyebab terjadinya perbedaan fenomena gerakan cairan di dinding.

Dalam rangka melakukan peninjauan yang lebih mendalam, maka selanjutnya juga dilakukan analisis secara kuantitatif. Pada tahap ini akan dicari nilai RMSE atau *error* yang menunjukkan seberapa dekat hasil simulasi yang dibuat dalam penelitian ini terhadap hasil simulasi pembandingan. Nilai RMSE akan dicari untuk tiap-tiap variasi nilai *gridx*, *gridy*, dan *dt* sehingga dapat diketahui pengaruh parameter tersebut terhadap hasil simulasi. Dalam pembahasan ini digunakan definisi *gridx* dan *gridy* seperti yang tercantum dalam *source code*. kemudian untuk mengubah ke dalam bentuk *dx* dan *dy* maka hanya perlu membagi jumlah grid dengan panjang atau tinggi kontainer.

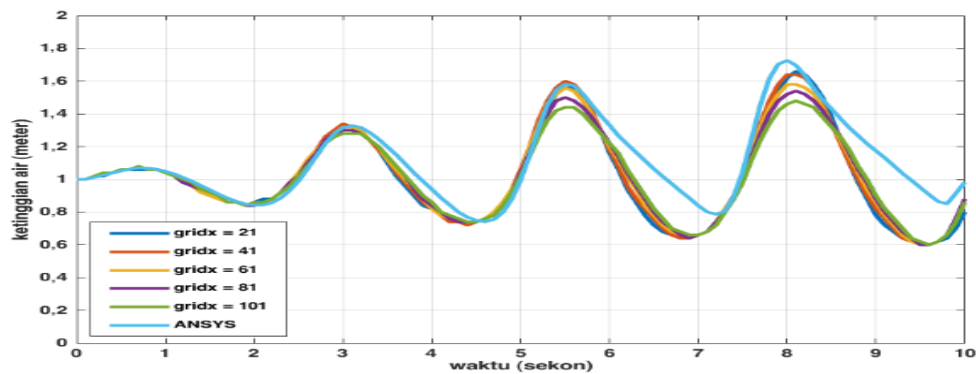
Variasi Nilai *gridx*

Pada tahap ini dilakukan variasi untuk nilai *gridx* sedangkan nilai *gridy* dibuat tetap dengan nilai *gridy* = 101 *grid* dan *dt* = 0,0001. Nilai *gridx* yang digunakan pada tahap ini adalah 21, 41, 61, 81, dan 101.

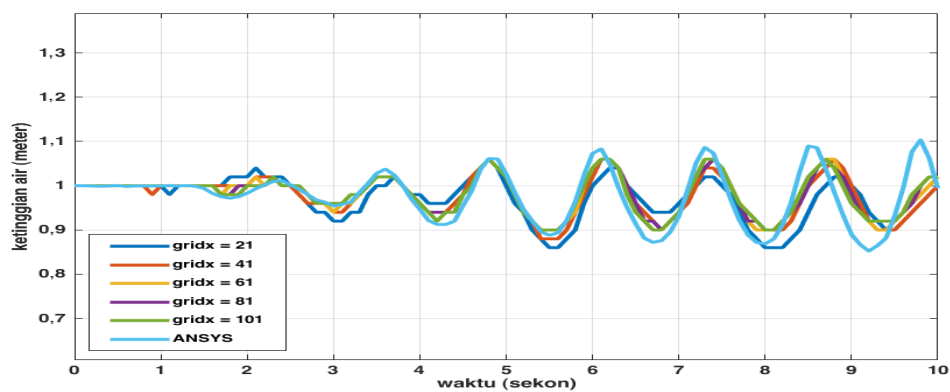
Langkah selanjutnya adalah menghitung tinggi fluida akibat gerak *sloshing* pada dinding bagian kiri, tengah dan kanan. Kemudian akan diperoleh ketinggian fluida untuk tiap satuan waktu yang hasilnya akan dibandingkan dengan hasil simulasi untuk variasi *gridx* yang berbeda. Grafik dari ketinggian air di tiga posisi (dinding kiri, tengah, dan kanan) terhadap waktu untuk tiap-tiap variasi *gridx* ditunjukkan pada Gambar 5, Gambar 6, Gambar 7, di bawah ini.



Gambar 5. Perubahan Ketinggian Air terhadap Waktu di Dinding Kiri untuk Variasi *gridx*



Gambar 6. Perubahan Ketinggian Air terhadap Waktu di Dinding Kanan untuk Variasi *gridx*



Gambar 7. Perubahan Ketinggian Air terhadap Waktu di Posisi Tengah untuk Variasi *gridx*

Untuk mempermudah interpretasi terhadap grafik di atas, maka dilakukan perhitungan error RMSE yang akan menunjukkan seberapa dekat hasil simulasi penelitian terhadap simulasi pembandingan. Semakin kecil nilai RMSE maka semakin dekat hasil simulasi penelitian terhadap simulasi pembandingan. Nilai RMSE untuk masing-masing variasi nilai *gridx* di tiga posisi ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai RMSE untuk Variasi *gridx*

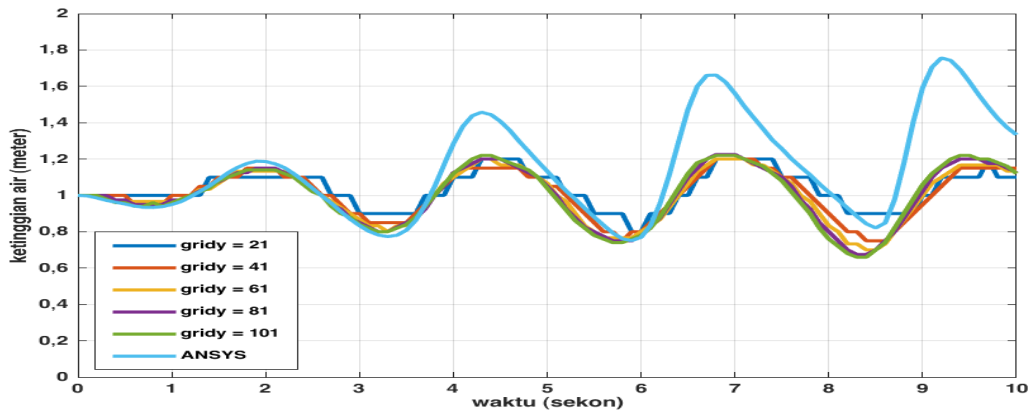
<i>gridx</i>	<i>gridy</i>	Nilai RMSE		
		Kiri	Tengah	Kanan
21	101	0,142	0,050	0,160

<i>gridx</i>	<i>gridy</i>	Nilai RMSE		
		Kiri	Tengah	Kanan
41		0,135	0,040	0,151
61		0,154	0,034	0,143
81		0,184	0,033	0,140
101		0,213	0,030	0,142

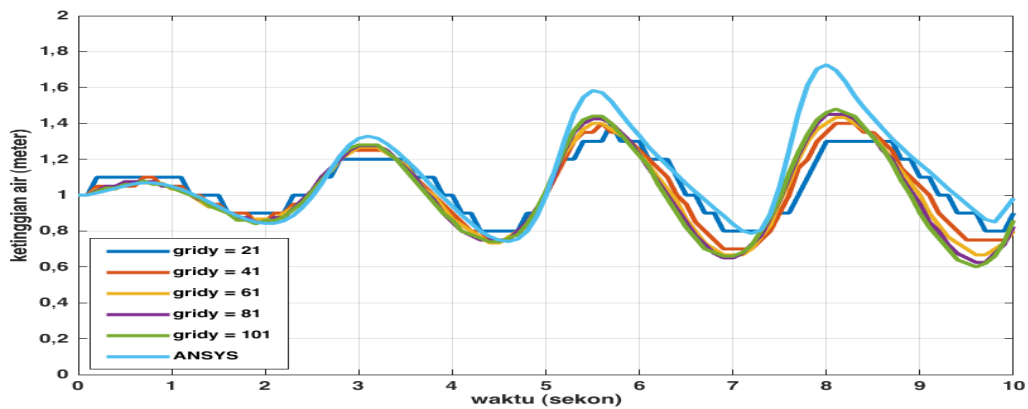
Berdasarkan data RMSE di atas, nilai RMSE pada dinding kiri semakin membesar seiring dengan bertambahnya nilai *gridx* atau seiring mengecilnya nilai *dx*. Sedangkan nilai RMSE pada posisi titik pengambilan data tengah dan kanan semakin mengecil seiring dengan bertambahnya nilai *gridx* atau seiring mengecilnya nilai *dx*.

Variasi Nilai *gridy*

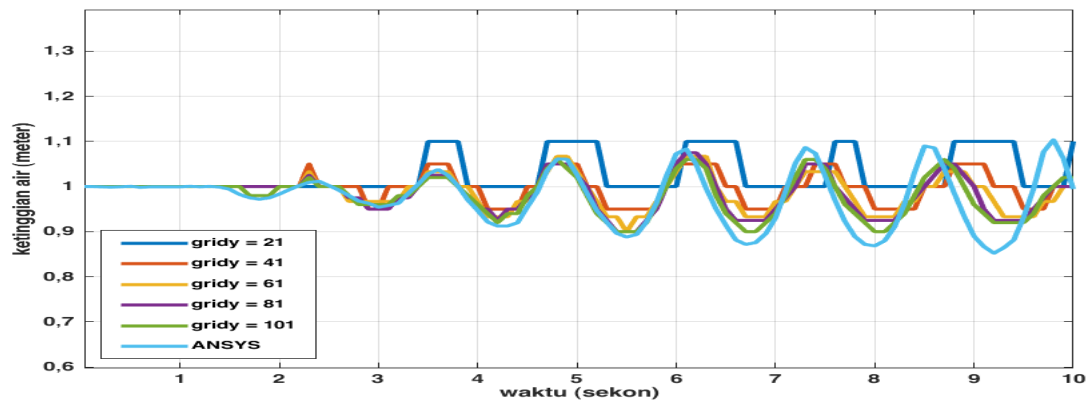
Pada tahap ini dilakukan variasi untuk nilai *gridy* sedangkan nilai *gridx* dibuat tetap dengan nilai *gridx* = 101 *grid* dan *dt* = 0,0001. Sama seperti tahap sebelumnya, nilai *gridy* yang digunakan pada tahap ini adalah 21, 41, 61, 81, dan 101. Grafik dari ketinggian air di tiga posisi (dinding kiri, tengah, dan kanan) terhadap waktu untuk tiap-tiap variasi *gridy* ditunjukkan pada Gambar 8, Gambar 9, Gambar 10 sebagai berikut:



Gambar 8. Perubahan Ketinggian Air terhadap Waktu di Dinding Kiri untuk Variasi *gridy*



Gambar 9. Perubahan Ketinggian Air terhadap Waktu di Dinding Kanan untuk Variasi *gridy*



Gambar 10. Perubahan Ketinggian Air terhadap Waktu di Posisi Tengah untuk Variasi *gridy*

Berdasarkan gambar di atas, pergerakan fluida antara hasil simulasi yang dibuat oleh MATLAB dan Ansys secara intuitif menunjukkan kecocokan gerak, dimana perubahan ketinggian antara kedua simulasi memiliki fase yang sama. Namun pada dinding bagian kiri, semakin berjalannya waktu ketinggian fluida semakin tidak relevan dengan simulasi pembandingan. Sehingga khusus untuk dinding kiri penggunaan *gridx* yang besar akan membuat *error* semakin besar. Nilai RMSE untuk setiap perubahan nilai *gridy* dari ketiga posisi tersebut ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai RMSE untuk Variasi *gridy*

<i>gridx</i>	<i>gridy</i>	Nilai RMSE		
		Kiri	Tengah	Kanan
101	21	0,235	0,092	0,142
	41	0,232	0,058	0,128
	61	0,225	0,044	0,133
	81	0,217	0,036	0,138
	101	0,213	0,030	0,142

Berdasarkan Tabel 3 di atas, nilai RMSE pada dinding kiri dan tengah semakin mengecil seiring dengan bertambahnya nilai *gridy* atau seiring mengecilnya nilai *dy*. Sedangkan pada posisi titik pengambilan data di dinding kanan, nilai RMSE terkecil terjadi pada *gridy* = 40, lalu semakin membesar seiring bertambahnya nilai *gridy*.

Setelah dilakukan variasi nilai *gridx* dan *gridy* ditemukan sebuah fakta yang menarik bahwa nilai RMSE untuk data ketinggian yang diambil di posisi tengah memiliki kecenderungan mengecil seiring bertambahnya nilai *gridx* maupun nilai *gridy*. Hal ini menunjukkan bahwa data yang diambil pada daerah selain di bagian dinding cenderung lebih konsisten dan sesuai dibanding data yang diambil pada dinding. Hal ini menjelaskan bahwa simulasi masih kurang mewakili untuk pergerakan fluida di bagian dinding. Dari temuan ini juga ditemukan fakta lain bahwa parameter *gridx* maupun *gridy* tidak dapat menjelaskan terjadinya perbedaan fenomena gerakan cairan di bagian dinding.

Variasi Nilai *dt*

Pada tahap ini dilakukan percobaan untuk melihat sejauh mana pengaruh dari perubahan atau variasi nilai *dt* terhadap hasil simulasi penelitian. Nilai *dt* tertinggi yang masih mampu dijalankan simulasi tanpa adanya error adalah 10^{-4} . Dalam meninjau batas maksimal nilai *dt* agar simulasi dapat berjalan stabil, maka nilai *dt* harus memenuhi syarat-syarat berikut :

$$\Delta t \leftarrow k \cdot \min \left(\frac{\Delta x}{|u|_{max}}, \frac{\Delta y}{|v|_{max}}, \frac{2v_{min}}{|u|_{max}^2}, \frac{2v_{min}}{|v|_{max}^2}, \frac{1}{2v_{max} \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right) \quad (31)$$

Berdasarkan syarat di atas, *k* merupakan sebuah faktor keamanan yang nilainya antara satu atau nol. Dalam banyak kasus nilai *k* sangat dianjurkan untuk bernilai mendekati satu. Sedangkan *v* merupakan viskositas kinematik fluida.

Untuk melihat pengaruh dt terhadap hasil simulasi, maka diberikan variasi lain untuk nilai dt dengan orde lebih rendah, yaitu 10^{-5} dan 10^{-6} . Seperti pada pembahasan-pembahasan sebelumnya, data ketinggian air akan diambil dari tiga titik berbeda yaitu, dinding kiri, tengah, dan dinding kanan, kemudian akan diulang untuk variasi nilai dt yang berbeda. Pada tahap ini nilai $gridx$ dan $gridy$ yang digunakan secara berturut-turut adalah 41 dan 101.

Setelah dilakukan pengambilan data untuk nilai dt yang berbeda, ditemukan fakta bahwa tidak ada pengaruh dt terhadap hasil simulasi. Ketiga variasi dt di atas menunjukkan hasil yang sama persis, sehingga diambil nilai dt terbesar, yaitu 10^{-4} pada penelitian ini untuk mengoptimalkan waktu *running* simulasi.

Optimalisasi $Gridx$ dan $Gridy$

Walau parameter $gridx$ dan $gridy$ tidak memberikan jawaban mengenai perbedaan fenomena gerak cairan yang terjadi di dinding, namun parameter tersebut secara keseluruhan mempengaruhi ketepatan dan akurasi dari hasil simulasi. Maka dari itu pada tahap ini akan dilakukan pencarian nilai $gridx$ dan $gridy$ yang membuat simulasi paling optimal dan mendekati simulasi perbandingan.

Variasi $gridx$ dan $gridy$ yang telah dilakukan ternyata menghasilkan tren RMSE yang berbeda untuk tiap-tiap variasi nilai $gridx$ dan $gridy$. Oleh karena itu, dilakukan penjumlahan nilai *error* data di dinding kanan dan kiri untuk melihat sumbangan *error* mana yang paling kecil, sehingga dapat ditentukan kombinasi nilai dx dan dy yang paling optimal. Hasil akumulasi nilai *error* data di dinding kanan dan kiri dapat dilihat pada [Tabel 4](#) dan [Tabel 5](#) di bawah ini.

Tabel 4. RMSE Total Dinding Kanan dan Kiri untuk Variasi $gridx$

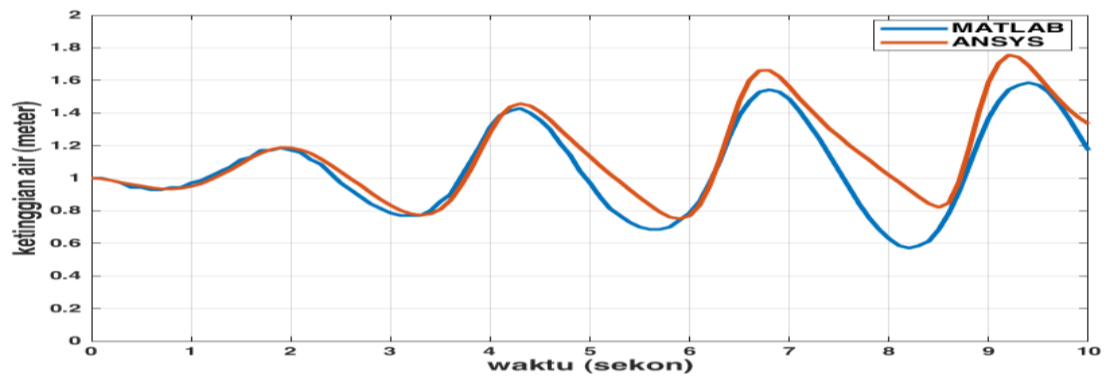
$gridy$	$gridx$	Nilai RMSE		Σ RMSE
		Kiri	Kanan	
101	21	0,142	0,160	0,302
	41	0,135	0,151	0,286
	61	0,154	0,143	0,297
	81	0,184	0,140	0,324
	101	0,213	0,142	0,355

Tabel 5. RMSE Total Dinding Kanan dan Kiri untuk Variasi $gridy$

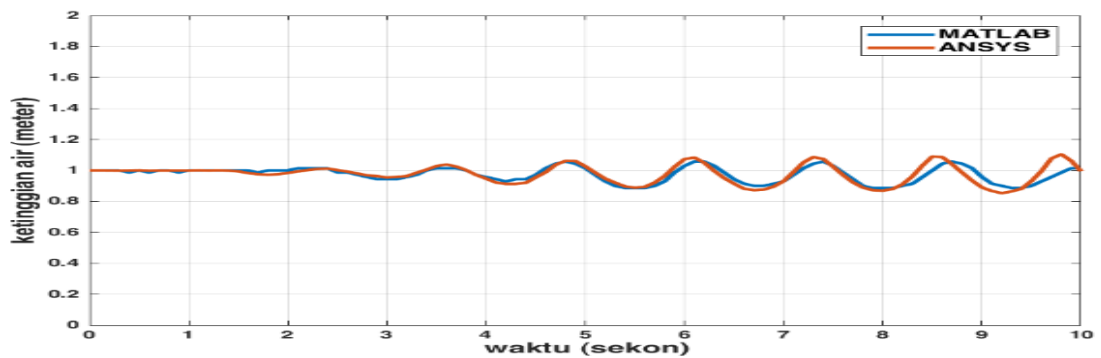
$gridx$	$gridy$	Nilai RMSE		Σ RMSE
		Kiri	Kanan	
101	21	0,235	0,142	0,377
	41	0,232	0,128	0,36
	61	0,225	0,133	0,358
	81	0,217	0,138	0,355
	101	0,213	0,142	0,355

Berdasarkan [Tabel 4](#) di atas, nilai RMSE total terkecil terjadi pada saat $gridx = 41$ atau pada saat $dx = 0,08$. Kemudian pada [Tabel 5](#), nilai RMSE total terkecil ternyata terjadi pada saat nilai $gridy$ paling besar atau dy paling kecil. Hal ini membuktikan bahwa semakin kecil nilai dy maka semakin kecil RMSE totalnya. Sehingga untuk memperoleh sumbangan *error* terkecil, maka nilai dy yang paling optimal untuk digunakan adalah nilai dy dengan nilai yang relatif kecil.

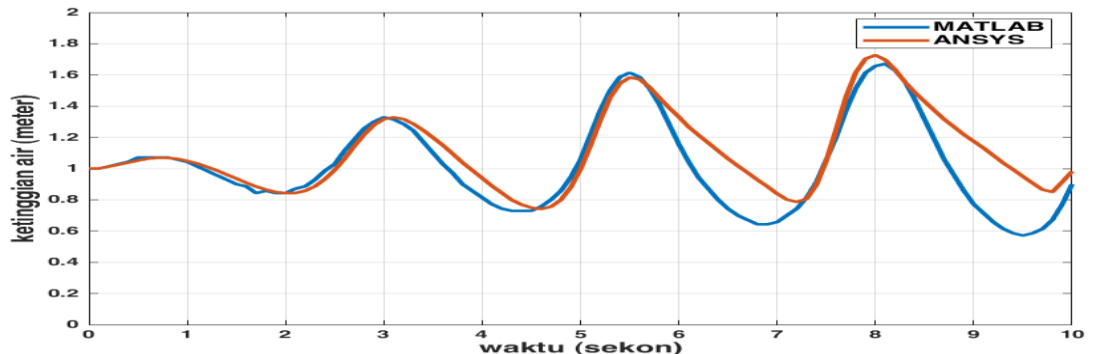
Dari hasil analisis di atas, kemudian dilakukan simulasi kembali dengan nilai dx dan dy yang memiliki nilai total RMSE terkecil. Pada simulasi ini, digunakan nilai $gridx$ atau dx yang optimal secara berturut-turut adalah 41 atau 0,08. Sedangkan nilai $gridy$ atau dy secara berturut-turut adalah 141 atau 0,0143. Hasil simulasi tersebut ditunjukkan pada [Gambar 11](#), [Gambar 12](#), [Gambar 13](#), di bawah ini.



Gambar 11. Grafik Perubahan Ketinggian Air di Dinding Kiri dengan Menggunakan $gridx = 41$ dan $gridy = 141$



Gambar 12. Grafik Perubahan Ketinggian Air di Tengah dengan Menggunakan $gridx = 41$ dan $gridy = 141$



Gambar 13. Grafik Perubahan Ketinggian Air di Dinding Kanan dengan Menggunakan $gridx = 41$ dan $gridy = 141$

Berdasarkan gambar di atas, penggunaan $gridx = 41$ dan $gridy = 141$ memberikan nilai RMSE di dinding kiri, tengah, dan kanan secara berturut-turut adalah 0,1349, 0,0316, dan 0,1610. Jika dibandingkan dengan Tabel 4 dan 5, nilai *error* pada dinding sudah lebih kecil dibandingkan nilai *error* pada tabel tersebut yang menandakan bahwa simulasi sudah mulai optimal. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa untuk mendapatkan simulasi yang paling optimal dalam penelitian ini, digunakan $gridx = 41$ dan $gridy = 141$ atau $dx = 0,08$ dan $dy = 0,0143$.

Pembahasan

Secara umum, hasil simulasi yang didapat dalam tahap ini sudah cukup memuaskan dengan pertimbangannya adalah didapat nilai RMSE yang semakin kecil dibanding ketika menggunakan nilai $gridx$ dan $gridy$ sebelumnya. Kemudian fase atau gerakan fluida juga terlihat sangat relevan antara kedua simulasi, hanya saja permasalahan anomali atau perbedaan gerak fluida pada dinding belum dapat terpecahkan dengan cara melakukan pengubahan nilai $gridx$, $gridy$ dan dt . Dari sini peneliti menduga bahwa perbedaan atau anomali gerak fluida di dinding terkait hubungannya dengan parameter internal

dalam persamaan matematika dan tidak berasosiasi dengan masalah komputasi. Parameter internal tersebut dapat meliputi banyak hal yang terkait dengan sifat fisika atau interaksi suatu zat, namun yang paling relevan dalam permasalahan ini adalah gaya adhesi. Gaya adhesi pada fluida mempengaruhi bagaimana interaksi fluida dengan suatu permukaan (dalam masalah ini adalah dinding kontainer). Dalam simulasi penelitian ini peneliti tidak melibatkan gaya antar moleku seperti gaya adhesi maupun permukaan tegangan, sedangkan Ansys melibatkan perhitungan yang lebih kompleks dengan melibatkan semacam gaya adhesi yang menyebabkan fluida tersebut dapat berinteraksi dengan dinding. Gaya inilah yang dapat menjelaskan mengapa gerakan fluida di dinding antara hasil simulasi MATLAB dan Ansys berbeda.

4. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dan hasil simulasi maka dapat ditarik kesimpulan bahwa validitas antara hasil simulasi dalam penelitian ini dengan simulasi pembandingan secara umum menunjukkan kecocokan gerak yang cukup akurat. Akurasi tersebut dapat diukur secara kuantitatif dengan melihat nilai RMSE yang mana nilainya relatif sangat kecil dengan RMSE maksimum adalah 0,235 dan RMSE minimum adalah 0,030 dan dapat diukur secara kualitatif di mana terjadi kesamaan fase gerak antara kedua simulasi.

5. DAFTAR PUSTAKA

- Awanda, R., Oktafianto, K., Arifin, A. Z., & Fatimah, N. (2019). Simulasi Sebaran Abu Pabrik Kapur Menggunakan Metode Beda Hingga. *Math Journal*, 4(2), 34-39. <https://doi.org/10.31102/zeta.2019.4.2.34-39>.
- Eka Lutfi Septiani. (2017). Komputasi Berbasis Dinamika Fluida Dalam Prediksi Performa Preduster Secara Unsteady State. *ILKOM; Jurnal Ilmiah*, 9(3). <https://doi.org/10.33096/ilkom.v9i3.198.368-371>.
- Georgieva, N., D., S., & T., P. (2021). Analysis of the capabilities of software products to simulate the behavior of dynamic fluid flows. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1031(1). <https://doi.org/012079.10.1088/1757-899X/1031/1/012079>.
- Gui, F., & Jiang, S. (2014). Numerical Simulation of Liquid Sloshing Problem under Resonant Excitation. *Sage Journals*. <https://doi.org/10.1155/2014/834657>.
- Iswanti, D. A., & Dwikoranto. (2015). Penerapan Model Pembelajaran Discovery Learning Terhadap Hasil Belajar Siswa Pada Materi Fluida Statis di SMAN 1 Mojosari. *Jurnal Inovasi Pendidikan Fisika*.
- Kim, H., Dey, M. K., Oshima, N., & Lee, Y. W. (. (2018). Numerical Study on Sloshing Characteristics with Reynolds Number Variation in a Rectangular Tank. <https://doi.org/10.3390/computation6040053>.
- Kurniawan, I. (2017). Analisa Posisi Pelat Peredam Gerak Lateral Cairan Di Dalam Truk Tangki Oval Yang Dimodifikasi Menggunakan Komputasi Dinamika Fluida. *Jurnal Teknik Mesin*, 6(1). <https://doi.org/10.22441/jtm.v6i1.1316>.
- Kusumastuti, D. L. (2014). Penerapan Dinamika Fluida dalam Perhitungan Kecepatan Aliran dan Perolehan Minyak di Reservoir. *ComTech: Computer, Mathematics and Engineering Applications*, 5(2). <https://doi.org/10.21512/comtech.v5i2.2232>.
- Man, W., Kyung, D., Kim, K., Man, S., Hong, S., Hee, K., & Choi, C. (2020). Simple analytical method for predicting the sloshing motion in a rectangular pool. *Nuclear Engineering and Technology*, 52(5), 947–955. <https://doi.org/10.1016/j.net.2019.10.025>.
- Mawarsih, E. (2017). Simulasi Numerik Persamaan Aliran Fluida Tak Mampat Menggunakan Metode Beda Hingga. In *Proceding Senatik: Seminar Nasional Teknologi Informasi dan Kedirgantaraan* (p. 3). <https://doi.org/10.28989/senatik.v3i0.116>.
- Mursito, S. H., Hadi, E. S., & Manik, P. (2019). Analisis Pengaruh Variasi Bentuk Perforated Pada Fixed Baffles Untuk Mengurangi Efek Sloshing Pada Ruang Muat Kapal Tanker Menggunakan Metode CFD. *Jurnal Teknik Perkapalan*, 7(1). Retrieved from <https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/naval/article/view/22238>.
- Nugraha, S. A., & Murdjito. (2020). Efek Penambahan Anti-Sloshing Pada Tangki Kotak Bermuatan Lng Akibat Gerakan Rolling Kapal. *Jurnal Jalasena*, 1(2). <https://doi.org/10.51742/jalasena.v1i2.100>.
- Pratiwi, N., & Yulkifli, Y. (2019). Peningkatan Kompetensi Keterampilan Peserta Didik Berbantuan LKPD Berbasis Model Discovery Learning pada Materi Fluida. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, 2(1). <https://doi.org/10.24042/ijsme.v2i1.4219>.
- Rahardjo, A. F., Trimulyono, A., & Scopus, P. M. (2021). Analisis Numerik Long Duration Sloshing Single-Phase dan Two-Phase Pada Tangki Prismatic Menggunakan Metode Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). *Jurnal Teknik P*, 9(1). Retrieved from <https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/naval/article/view/28258>.

- Rasagama, I. G. (2020). Optimasi Pengukuran Laju Air Pada Susunan Peralatan Eksperimen Dinamika Fluida Sederhana. *JPF : Jurnal Pendidikan Fisika*, 8(2). <https://doi.org/10.24127/jpf.v8i2.3026>.
- Trimulyono, A., & Wicaksono, A. (2018). Simulasi numerik large-deformation surface wave dengan smoothed particle hydrodynamics. *Kapal: Jurnal Ilmu Pengetahuan Dan Teknologi Kelautan*, 15(3), 102–106. <https://doi.org/10.14710/kapal.v15i3.21535>
- Zeneli, M., Aris, N., & Sotirios, K. (2020). Numerical methods for solid-liquid phase-change problems. *Ultra-High Temperature Thermal Energy Storage, Transfer and Conversion*, 165–199. <https://doi.org/10.14710/ijred.5.3.199-210>