

# PERSAMAAN NEURONIK DENGAN TUNDAAN BERGANTUNG WAKTU

Sariyasa

Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja

email: sariyasa64@yahoo.com

## Abstrak

Paper ini mendeskripsikan penurunan model diskrit dari model kontinu jaringan saraf dengan tundaan bergantung waktu. Diskritisasi dilakukan dengan aproksimasi model kontinu oleh persamaan diferensial biasa dengan *piecewise constant argument* (PCA). Dengan menerapkan skema semi implisit Euler, dari persamaan dengan PCA ini diturunkan model diskrit untuk model kontinu jaringan saraf dengan tundaan bergantung waktu. Melalui simulasi numerik ditunjukkan bahwa model diskrit secara dinamik ekivalen dengan model kontinu.

**Kata kunci:** model diskrit, model komputasi, model jaringan saraf, tundaan bergantung waktu

## Abstract

This paper described formulation of a discrete model from a continuous neural network model with time dependent delay. Discretization was carried out by approximating the continuous model with ordinary differential equation with piecewise constant argument, from which a discrete model was obtained after employing Euler semi-implicit scheme. It is shown, using numerical simulation, that the discrete model is dynamically equivalent with the continuous model.

**Keywords:** discrete model, computational model, neural network model, time dependent delay

## PENDAHULUAN

Matematika menyediakan banyak jenis persamaan dengan beragam tingkat kompleksitas untuk pemodelan dan analisis dinamik suatu fenomena. Penggunaan persamaan diferensial biasa dan parsial untuk memodelkan sistem biologi mempunyai sejarah panjang dimulai dari periode Malthus, Verhulst, Lotka dan Volterra. Dalam penerapan model-model matematika untuk memahami lebih baik fenomena yang makin kompleks, semakin disadari bahwa model-model yang paling sederhana tidak mampu

merepresentasikan variasi yang sangat kaya dari dinamik yang teramati dalam sistem alam. Hal ini terjadi karena tingkat kompleksitas dari fenomena yang teramati semakin tinggi. Ada sejumlah kemungkinan pendekatan untuk mengatasi kompleksitas ini. Salah satu pendekatan adalah membangun sistem persamaan diferensial biasa atau parsial yang lebih besar, yakni sistem dengan lebih banyak persamaan diferensial. Sistem ini dapat merupakan hampiran yang cukup baik bagi perilaku yang teramati, tetapi sistem ini memuat

banyak parameter yang sering tidak dapat ditentukan melalui eksperimen.

Pendekatan lain yang semakin banyak diadopsi adalah memasukkan *time delay* (selanjutnya disebut tundaan) dalam persamaan diferensial sehingga diperoleh *delay differential equation* (persamaan diferensial tundaan/PDT). Tundaan merupakan komponen alami dari proses dinamik dalam biologi, ekologi, fisiologi, ekonomi, epidemiologi, dan mekanik. Tundaan ini dapat merepresentasikan waktu kehamilan, periode inkubasi, waktu untuk hantaran, atau waktu yang diperlukan neuron untuk merespon.

Kalau persamaan diferensial biasa memodelkan masalah dimana variabel bereaksi terhadap kondisi saat ini, persamaan diferensial tundaan memodelkan masalah dimana terdapat *after-effect* yang mempengaruhi paling sedikit satu variabel.

Persamaan diferensial tundaan muncul dalam berbagai bidang pemodelan matematika, misalnya dinamik populasi (dengan memperhitungkan waktu kehamilan), penyakit menular (melibatkan periode inkubasi), kinetika fisiologis dan farmasi (misalnya memodelkan reaksi tubuh terhadap  $CO_2$  dalam sirkulasi darah), kinetika kimia (seperti pencampuran reaktan), kendali navigasi untuk kapal dan pesawat, dan masih banyak lainnya.

Model dengan tundaan semakin umum digunakan, muncul dalam pemodelan banyak cabang biologi. Model dengan tundaan telah digunakan untuk mendeskripsikan beberapa aspek dari dinamik penyakit menular, terapi obat (Nelson, et al., 2000) dan respon kekebalan (Cooke, et al., 1998). Model

semacam ini juga muncul dalam studi tentang model-model kemostat (Zhao, 1995), detak jantung (Smolen, et al., 2002), epidemiologi (Cooke, et al., 1999), sistem pernapasan (Vielle dan Chauvet, 1998), pertumbuhan tumor (Villasana dan Radunskaya, 2003) dan jaringan saraf (lihat misalnya Chen, 2001; van den Driessche, et al., 2001; van den Driessche dan Zhou, 1998; Sariyasa, 2005).

Beberapa ahli pemodelan mengabaikan pengaruh tundaan dan menggunakan persamaan diferensial biasa sebagai pengganti persamaan diferensial tundaan. Kuang (1993) mengemukakan bahwa terdapat resiko yang dihadapi bila tundaan diabaikan, sekecil apapun tundaan tersebut. Lebih jauh Kuang (1993) menyatakan bahwa mengabaikan tundaan sama artinya dengan mengabaikan realitas. Ada pula ahli pemodelan yang mengganti persamaan diferensial tundaan skalar dengan sistem persamaan diferensial biasa dengan memperkenalkan variabel bantu untuk mensimulasikan fenomena yang sesungguhnya lebih sesuai dimodelkan oleh persamaan diferensial tundaan. Namun, menurut Baker, et al. (1994), strategi penggantian ini mempunyai resiko karena terdapat perbedaan kualitatif yang melekat (eksistensi solusi yang beresilasi, munculnya *chaos*, pengaruh tundaan terhadap sistem konservatif dan sistem yang stabil atau tak stabil) antara persamaan diferensial tundaan dan sistem persamaan diferensial biasa. (Baker, et al., 1994).

Tidak seperti persamaan diferensial biasa, untuk persamaan diferensial tundaan (bahkan yang linier sekalipun) tidak terdapat metode umum

untuk mendapatkan solusi dalam bentuk eksplisit. Oleh karena itu, metode numerik untuk persamaan diferensial tundaan menjadi sesuatu yang sangat penting. Di samping itu, penerapan metode numerik yang ekstensif tidak dapat dihindari dalam analisis kestabilan dan bifurkasi untuk tujuan praktis (Seydel, 1988).

Metode numerik untuk persamaan diferensial biasa tidak begitu saja dapat diterapkan untuk persamaan diferensial tundaan sebab dalam penerapannya sifat kestabilan dan akurasi dari metode tersebut tidak dapat dipertahankan lagi (Bellen dan Zennaro, 2003). Lebih jauh (Bellen dan Zennaro, 2003) menyatakan bahwa mengintegrasikan persamaan diferensial tundaan sesungguhnya menuntut penggunaan metode yang dirancang khusus sesuai dengan karakteristik persamaan dan perilaku solusi (Bellen dan Zennaro, 2003). Dengan demikian, perlu dikembangkan suatu skema numerik yang dapat diterapkan untuk sebagian besar kelas persamaan diferensial tundaan yang berbeda. Adanya skema numerik semacam ini sangat bermanfaat terutama bagi non-matematikawan yang memerlukan persamaan diferensial tundaan dalam kerjanya; juga dapat memperluas keterpakaian persamaan diferensial tundaan pada bidang-bidang di luar matematika.

Skema numerik yang digunakan untuk menghampiri solusi persamaan diferensial tundaan akan menghasilkan model diskrit. Tentu saja model diskrit, yang merupakan hampiran numerik dari model kontinu, diinginkan dapat "mewarisi" karakteristik dinamik dari model kontinunya. Dengan demikian model diskrit dapat diterapkan sebagai

model komputasi dengan tetap mempertahankan karakteristik fisik atau biologi yang dimiliki oleh model kontinu. Dalam Stewart (1992), Stuart dan Humphries (1996), dan Broomhead dan Iserles (1992) dikaji pentingnya model diskrit "mewarisi" karakteristik dinamik dari model kontinunya.

Pendekatan yang sering digunakan untuk memformulasi model diskrit adalah dengan mendiskritisasi model kontinu. Terdapat banyak skema numerik (antara lain skema Euler, Runge-Kutta) yang dapat digunakan untuk mendiskritkan model kontinu. Namun proses diskritisasi semacam ini sering menghasilkan model diskrit dengan dinamik yang tidak sejalan dengan dinamik induknya (model kontinu). Beberapa studi (Devaney, 1989; Iserles, 1990; Mickens, 1994; Prufer, 1985; Ushiki, 1982; Yee, et al., 1991) menunjukkan bahwa dinamik dari sistem yang diperoleh dari diskritisasi model kontinu mempunyai karakteristik dinamik yang berbeda secara signifikan dari dinamik model kontinunya. Stutzer (1980) menekankan bahwa "*the discrete-time analog of a continuous-time system cannot reliably be assumed to be found by replacing derivatives with first differences*". Terkait dengan hal ini, model logistik merupakan ilustrasi yang sangat baik. Dalam bentuk kontinu, model logistik mempunyai dinamik yang "baik", yakni konvergen monoton. Akan tetapi, diskritisasi model logistik kontinu dengan skema Euler menghasilkan model diskrit dengan perilaku *chaotic*. Jelas, konvergen monoton dan *chaotic* merupakan dua dinamik yang saling bertolak belakang.

Berikut ini diberikan ilustrasi penyimpangan dinamik sebagai akibat

diskritisasi model kontinu. Ilustrasi ini diambil dari Mohamad (2000). Perhatikan persamaan diferensial

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Solusi dari persamaan (1) diberikan oleh

$$y(t) = e^{-t} y(0), \quad t > 0. \quad (2)$$

Jika persamaan (1) didiskritkan dengan skema diskritisasi Euler diperoleh model diskrit dalam bentuk

$$y(n+1) = (1 - h)y(n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

dengan  $h > 0$  menyatakan ukuran diskritisasi dan  $y(n)$  menyatakan nilai dari  $y(t)$  untuk  $t = nh$ . Solusi dari (3) diberikan oleh

$$y(n) = (1 - h)^n y(0), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa  $y(t)$  pada (2) memenuhi  $y(t) \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$  dan ini berarti kekonvergenan dari  $y(t)$  adalah monoton. Di lain pihak,  $y(n)$  pada (4) mempunyai perilaku yang bergantung pada nilai  $h$  sebagai berikut.

- Untuk  $0 < h < 1$ ,  $y(n) \rightarrow 0$  untuk  $n \rightarrow \infty$  (konvergensi monoton).
- Untuk  $h = 1$ ,  $y(n) = 0$  untuk semua  $n$  dan untuk semua  $y(0)$ .
- Untuk  $1 < h < 2$ ,  $y(n)$  berosilasi dengan  $|y(n)| \rightarrow 0$  untuk  $n \rightarrow \infty$  (konvergensi berosilasi).
- Untuk  $h = 2$ ,  $y(n)$  periodik dengan periode 2.
- Untuk  $h > 2$ ,  $y(n)$  berosilasi dan  $|y(n)| \rightarrow \infty$  untuk  $n \rightarrow \infty$  (divergen).

Membandingkan model kontinu (1) dan model diskrit (3) pada contoh ini, jelas bahwa model kontinu hanya mempunyai satu dinamik yakni konvergen monoton. Sedangkan model diskrit yang diturunkan dari model kontinu

mempunyai dinamik yang bervariasi tergantung pada nilai  $h$ . Parameter  $h > 0$  dalam (3) yang muncul sebagai akibat proses diskritisasi mempunyai pengaruh terhadap dinamik dari (4). Contoh ini menunjukkan bahwa diskritisasi menghasilkan model diskrit dengan dinamik yang tidak dimiliki oleh model kontinu.

Perbedaan dinamik ini selanjutnya dijelaskan oleh Mohamad (2000) bahwa karakteristik yang menyimpang ini dapat terjadi bila unit diskritisasi (yakni  $h$ ) dibuat tetap sementara parameter model kontinu dibuat bervariasi dalam ruang parameter asimtotik dari model kontinu atau sebaliknya. Akibatnya, harus ada pembatasan pada nilai  $h$  atau pada parameter semula sehingga tidak ada penyimpangan pada model diskrit. Dengan pembatasan ini, kemampuan komputasi dari model kontinu tidak dapat dicapai secara maksimal oleh model diskrit.

Oleh karena itu permasalahan utama dalam penelitian ini adalah bagaimana mengonstruksi model diskrit yang diturunkan dari model kontinu sehingga model diskrit mempunyai dinamik yang ekuivalen dengan model kontinunya. Untuk keperluan ini, perlu dikembangkan teknik diskritisasi nonstandar sehingga diperoleh skema numerik yang bisa menghasilkan model diskrit yang mewarisi karakteristik model kontinu darimana model diskrit diturunkan.

Dengan demikian, tujuan penelitian ini adalah untuk mengembangkan skema numerik yang dapat digunakan untuk mendiskritisasi model kontinu sedemikian sehingga model diskrit mempunyai karakteristik

dinamik yang ekuivalen dengan model kontinunya.

Skema numerik yang dihasilkan selanjutnya diterapkan pada model kontinu jaringan saraf tipe Hopfield yang telah diketahui dinamikanya sehingga ketercapaian tujuan penelitian ini dapat diukur.

Persamaan diferensial dengan tundaan adalah persamaan dalam bentuk

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1(t, y(t))), y(t - \tau_2(t, y(t))), \dots)$$

dengan  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  menyatakan tundaan yang bisa berupa konstanta, atau bisa berupa fungsi dalam  $t$  atau bisa merupakan fungsi dalam  $t$  dan  $y$ . Persamaan diferensial tundaan merupakan generalisasi dari persamaan diferensial biasa

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t))$$

( $g(\cdot, \cdot) : R \times R^l \rightarrow R^l$ ) bila  $\dot{x}(t)$  dari suatu proses juga bergantung pada kondisi sebelumnya. Teori umum dari persamaan diferensial tundaan telah banyak dipaparkan dalam beberapa literatur antara lain dalam Driver (1977), El'sgol'ts dan Norkin (1973), Gopalsamy (1992) serta Kuang (1993).

Pandang persamaan

$$\frac{dx}{dt} = x(t - (e^{-t} + 1)) + \cos t - \sin(t - e^{-t} - 1) \quad (5)$$

untuk  $t \geq 0$ . Dalam persamaan (5), tundaan merupakan fungsi yang berubah terhadap waktu, yaitu  $\tau(t) = e^{-t} + 1$ . Jika fungsi awal diambil

$$x(t) = \sin t, \quad -2 \leq t \leq 0, \quad (6)$$

maka dengan substitusi langsung dapat ditunjukkan bahwa fungsi  $x(t) = \sin t$ ,  $t > 0$ , merupakan solusi dari masalah nilai awal (5) dan (6).  $\square$

Persamaan (5) merupakan contoh persamaan diferensial dengan tundaan yang berubah terhadap waktu.

Meskipun mempunyai kemiripan bentuk dengan persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial tundaan mempunyai beberapa fitur yang menyebabkan analisis terhadap persamaan diferensial tundaan lebih rumit. Masalah nilai awal dalam persamaan diferensial tundaan memerlukan lebih banyak informasi dibandingkan dengan masalah nilai awal dalam sistem tanpa tundaan. Untuk sistem persamaan diferensial biasa, solusi tunggal ditentukan oleh nilai awal dalam ruang Euclid pada saat awal  $t_0$ . Untuk sistem dengan tundaan, diperlukan informasi pada seluruh interval  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Jelas bahwa untuk mengetahui laju perubahan pada  $t_0$ , diperlukan  $x(t_0)$  dan  $x(t_0 - \tau)$  dan untuk  $\dot{x}(t_0 + \varepsilon)$  diperlukan  $x(t_0 + \varepsilon)$  dan  $x(t_0 + \varepsilon - \tau)$ . Jadi, untuk membuat masalah nilai awal bermakna, diperlukan fungsi awal atau awal nilai  $x(t)$  pada interval  $[-\tau, 0]$ . Setiap fungsi awal menentukan solusi tunggal bagi persamaan diferensial tundaan. Jika diinginkan fungsi awal kontinu, maka ruang solusi mempunyai dimensi yang sama dengan  $C([t_0 - \tau, t_0], R)$ .

Teori persamaan diferensial biasa mempunyai banyak kesamaan dengan teori persamaan diferensial tundaan. Beberapa metode analitis untuk persamaan diferensial biasa dapat diperluas untuk diterapkan pada persamaan diferensial tundaan sepanjang memungkinkan. Namun, perbedaan di antara keduanya memerlukan pendekatan baru. Jika pada persamaan diferensial biasa diasumsikan bahwa efek perubahan

pada sistem terjadi seketika, maka pada persamaan diferensial tundaan efek perubahan pada sistem tidak terjadi seketika. Dalam hal ini riwayat sistem pada masa lampau perlu diperhitungkan. Perbedaan lainnya adalah persamaan diferensial biasa memerlukan nilai awal tetapi persamaan diferensial tundaan memerlukan fungsi awal.

Formulasi model matematika sebagai persamaan diferensial fungsional, yang mencakup semua PDT, memungkinkan nilai fungsi dan turunannya untuk masa sekarang dan masa lampau dapat dipergunakan untuk menentukan keadaan sistem di masa mendatang. Hal ini memberikan model yang lebih baik dan lebih realistis bagi suatu proses atau sistem sebab "*an increase in the complexity of the mathematical models can lead to a better quantitative consistency with real data*" tetapi ada "harga" yang harus dibayar (Baker, 1999).

Model persamaan diferensial tundaan merupakan alternatif bagi model persamaan diferensial biasa dalam berbagai aplikasi. Potensi aplikasi persamaan diferensial tundaan yang luas telah diungkap dalam berbagai literatur. Baker, et al. (1999) melaporkan penggunaan persamaan diferensial tundaan untuk pemodelan numerik dalam biosains dan mencakup penerapan dalam epidemiologi, imunologi, ekologi, dan dalam studi tentang HIV. Persamaan diferensial tundaan juga digunakan dalam berbagai bidang ilmu seperti fisika, viskoelastisitas, biologi, kedokteran, ekonomi, mekanik. Kuang (1993) dan Gopalsamy (1992) menekankan penerapan pada dinamik populasi.

Beberapa bidang aplikasi menggunakan kelas persamaan diferensial tundaan tertentu, misalnya persamaan diferensial tundaan terdistribusi digunakan dalam model infeksi HIV, biomodelling; persamaan diferensial tundaan stokastik menemukan penerapan dalam *pupil light reflex*, *immune response*, dan produksi sel darah (Baker, 1999).

### **Solusi Numerik Persamaan Diferensial Tundaan**

Tidak seperti persamaan diferensial biasa, untuk persamaan diferensial tundaan (bahkan yang linier sekalipun) tidak terdapat metode umum untuk mendapatkan solusi dalam bentuk eksplisit. Meskipun demikian, untuk persamaan diferensial tundaan dengan koefisien konstan, masih memungkinkan menerapkan beberapa pendekatan untuk menentukan solusi analitik, misalnya *method of steps*, penentuan solusi eksponensial, dan transformasi Laplace. Keterbatasan penerapan pendekatan ini mendorong penggunaan metode numerik untuk menentukan solusi persamaan diferensial tundaan.

Untuk persamaan skalar dengan tundaan konstan, relatif sederhana untuk mendapatkan solusi numerik dengan menggunakan skema numerik untuk persamaan diferensial biasa, namun teknik ini menjadi mahal dari segi komputasi sejalan dengan meningkatnya ukuran sistem persamaan diferensial biasa. Selain itu, penerapan metode numerik untuk persamaan diferensial biasa pada persamaan diferensial tundaan tidak begitu saja dapat dilakukan sebab hal ini dapat merusak sifat kestabilan dan akurasi dari metode tersebut. (Bellen dan Zennaro, 2003).

Pendekatan yang lebih baik adalah memanfaatkan metode langkah (*method of steps*). Ide ini sangat sederhana dan dapat diuraikan sebagai berikut. Pada interval  $[t_0, t_0 + \tau]$ , persamaan diferensial tundaan menjadi  $y'(t) = f(t, y(t), \psi(t - \tau))$  yang merupakan persamaan diferensial biasa dengan solusi  $\tilde{y}_1$  yang didefinisikan pada interval  $[t_0, t_0 + \tau]$ . Pada interval  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ , persamaan diferensial tundaan menjadi  $y'(t) = f(t, y(t), \tilde{y}_1(t - \tau))$  yang dapat diselesaikan dengan pemecah persamaan diferensial biasa untuk menghasilkan fungsi  $\tilde{y}_2$  yang didefinisikan pada interval  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ . Prosedur yang sama diterapkan pada interval  $[t_0 + k\tau, t_0 + (k + 1)\tau]$ ,  $k = 2, 3, \dots$  dengan menyelesaikan persamaan diferensial biasa  $y'(t) = f(t, y(t), \tilde{y}_k(t - \tau))$  pada setiap interval. Perhatikan bahwa solusi eksak  $y(t)$  analitik pada setiap interval  $[t_0 + k\tau, t_0 + (k + 1)\tau]$ .

### Solusi Hampiran Persamaan Diferensial Tundaan dengan *Piecewise Constant Argument*

Paparan berikut ini diadopsi dari Györi (1991). Pandang persamaan diferensial tundaan

$$\frac{dx}{dt} + p_0(t)x(t) + \sum_{i=1}^m p_i(t)x(t - \tau_i) = 0, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

dimana

- H1. untuk  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $\tau_i$  adalah bilangan riil positif dan  $\tau = \max_{1 \leq i \leq m} \tau_i$

H2. Untuk  $i = 1, 2, \dots, m$ , fungsi  $p_i : R_+ \rightarrow R$  kontinu.

Persamaan (7) dilengkapi dengan kondisi awal dalam bentuk

$$x(s) = \phi(s), \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad \phi \in C([-\tau, 0], R). \quad (8)$$

Dengan hipotesis H1 dan H2, masalah nilai awal (7) dan (8) mempunyai solusi tunggal yang kontinu pada interval  $[-\tau, \infty)$  dan terdiferensialkan secara kontinu pada  $[0, \infty)$ . Solusi dari (7) dan (8) dinyatakan oleh  $x(\phi)(t)$ . Misal  $k \geq 1$  bilangan bulat tetap dan ambil

$$h = \frac{\tau}{k}. \quad (9)$$

Dengan menggunakan  $h$ , didefinisikan tiga persamaan diferensial tundaan dengan *piecewise constant argument*, yakni

$$\frac{du(t)}{dt} + p_0(t)u(t) + \sum_{i=1}^m p_i(t)u\left(\left[\frac{t}{h} - \left[\frac{\tau_i}{h}\right]\right]h\right) = 0, \quad t \geq 0 \quad (10)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + p_0(t)v\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right) + \sum_{i=1}^m p_i(t)v\left(\left[\frac{t}{h} - \left[\frac{\tau_i}{h}\right]\right]h\right) = 0, \quad t \geq 0 \quad (11)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} + p_0\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)w\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right) + \sum_{i=1}^m p_i\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)w\left(\left[\frac{t}{h} - \left[\frac{\tau_i}{h}\right]\right]h\right) = 0, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

Persamaan ini dilengkapi dengan kondisi awal berikut

$$u(jh) = \phi(jh), \quad j = -k, \dots, 0 \quad (13)$$

$$v(jh) = \phi(jh), \quad j = -k, \dots, 0 \quad (14)$$

$w(jh) = \phi(jh), j = -k, \dots, 0$  (15)  
 dengan  $\phi \in C$ .

Yang dimaksud solusi dari (10) dan (13) adalah fungsi  $u_h(\phi)(t)$  yang terdefinisi pada himpunan  $\{-k, \dots, 0\} \cup (0, \infty)$  dan memenuhi sifat berikut

- a.  $u_h(\phi)(t)$  kontinu pada  $[0, \infty)$
- b. turunan dari  $u_h(\phi)(t)$  ada pada setiap titik  $t \in [0, \infty)$  dengan pengecualian titik  $t = nh, n \in N$ , dimana turunan satu arah ada
- c. fungsi  $u(t) = u_h(\phi)(t)$  memenuhi (7) pada setiap interval  $[nh, (n + 1)h]$  untuk  $n \in N$ .

Definisi solusi  $v_h(\phi)(t)$  dan  $w_h(\phi)(t)$  dari masalah nilai awal (11) dan (14) serta (12) dan (15) analog. Persamaan (10), (11), dan (12) sangat terkait dengan persamaan diferensi. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

**Teorema 1.** *Asumsikan hipotesis H1 dan H2 terpenuhi dan  $k \geq 1$  adalah bilangan bulat. Ambil  $h = \frac{\tau}{k}$  dan*

$$k_i = \left\lceil \frac{\tau_i}{h} \right\rceil \text{ untuk semua } i = 1, 2, \dots, m.$$

Maka

- a. *solusi  $u_h(\phi)(t)$  dari (10) dan (13) diberikan oleh*

$$u_h(\phi)(t) = a(n)e^{-\int_{nh}^t p_0(s) ds} - \int_0^t p_0(s) ds e^{-\int_0^s p_0(r) dr} \sum_{i=1}^m \int_{nh}^t p_i(s)e^{-\int_0^s p_0(r) dr} ds a(n-k_i)$$

untuk semua  $nh \leq t \leq (n + 1)h$  dan  $n \geq 0$  dimana  $[a(n)]$  adalah barisan yang memenuhi persamaan diferensi

$$a(n+1) - a(n)e^{-\int_{nh}^{(n+1)h} p_0(s) ds} + e^{-\int_0^{nh} p_0(s) ds} \sum_{i=1}^m \int_{nh}^{(n+1)h} p_i(s)e^{-\int_0^s p_0(r) dr} ds a(n-k_i) = 0, n \geq 0$$

dengan  $a(n) = \phi(nh), n = -k, \dots, 0$ .

- b. *solusi  $v_h(\phi)(t)$  dari (11) dan (14) diberikan oleh*

$$v_h(\phi)(t) = \left( 1 - \int_{nh}^t p_0(u) du \right) b(n) + \sum_{i=1}^m \int_{nh}^t p_i(u) du b(n-k_i)$$

untuk semua  $nh \leq t \leq (n + 1)h$  dan  $n \geq 0$  dimana  $[b(n)]$  adalah barisan yang memenuhi persamaan diferensi

$$\Delta b(n) + \int_{nh}^{(n+1)h} p_0(u) du b(n) + \sum_{i=1}^m \int_{nh}^{(n+1)h} p_i(s) ds b(n-k_i) = 0, \quad n \geq 0$$

dengan  $b(n) = \phi(nh)$ ,  $n = -k, \dots, 0$ .

- c. solusi  $w_h(\phi)(t)$  dari (12) dan (15) diberikan oleh

$$w_h(\phi)(t) = c(n) - (p_0(nh)c(n) + \sum_{i=1}^m p_i(nh)c(n-k_i))(t-nh)$$

untuk semua  $nh \leq t \leq (n+1)h$  dan  $n \geq 0$  dimana  $[c(n)]$  adalah barisan yang memenuhi persamaan diferensi

$$\Delta c(n) + hp_0(nh)c(n) + h \sum_{i=1}^m p_i(nh)c(n-k_i) = 0, \quad n \geq 0$$

dengan  $c(n) = \phi(nh)$ ,  $n = -k, \dots, 0$ .

## METODE

Penelitian ini dilaksanakan dengan melakukan kaji pustaka. Analisis dilakukan menggunakan teori persamaan diferensial dengan tundaan. Secara garis besar, kegiatan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah

1. mengembangkan formulasi skema numerik berdasarkan teknik *piecewise constant arguments* yang digabungkan dengan metode semi-implisit Euler;
2. menerapkan skema numerik tersebut pada model matematika jaringan saraf tipe

Hopfield yang telah diketahui dinamikanya;

3. menggunakan model diskrit yang diperoleh sebagai model komputasi untuk keperluan simulasi numerik.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Penurunan model diskrit didasarkan atas teknik yang dikembangkan oleh Györi (1991) dan teknik ini telah digunakan oleh Gopalsamy dan Mohamad (2002). Paparan berikut didasarkan atas hasil karya dari Gopalsamy dan Mohamad (2002). Pandang persamaan diferensial tundaan

$$\frac{dx}{dt} = -p_0(t)x(t) - \sum_{i=1}^m p_i(t)x(t-\tau_i), \quad t \geq 0 \quad (16)$$

Pandang interval domain  $(-\infty, \infty)$  sebagai gabungan saling lepas dari interval dalam bentuk  $[jh, (j+1)h)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  dengan  $\mathbb{Z}$  menyatakan himpunan bilangan bulat dan  $h$  adalah bilangan riil tetap yang menyatakan ukuran langkah diskritisasi. Persamaan (16) selanjutnya dihampiri oleh persamaan diferensial dengan *piecewise constant arguments* dalam bentuk

$$\frac{dx(t)}{dt} = -p_0\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)x(t) - \sum_{i=1}^m p_i\left(\left[\frac{t}{h}\right]h - \left[\frac{\tau_i}{h}\right]h\right) \quad (17)$$

untuk  $t \in [nh, (n+1)h)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $h > 0$  adalah bilangan riil tetap yang menyatakan ukuran langkah diskritisasi serta  $[\alpha]$  menyatakan bilangan bulat terbesar dalam  $\alpha \in \mathbb{R}$  dengan  $\mathbb{R}$  adalah

himpunan bilangan riil. Berikutnya digunakan skema semi implisit Euler pada persamaan (17) sehingga diperoleh

$$\frac{x\left(\left[\frac{t}{h}\right]h+h\right)-x\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)}{h} = -p_0\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)x\left(\left[\frac{t}{h}\right]h+h\right) - \sum_{i=1}^m p_i\left(\left[\frac{t}{h}\right]h\right)x\left(\left[\frac{t}{h}\right]h-\left[\frac{\tau_i}{h}\right]h\right) \tag{18}$$

untuk  $t \in [nh, (n + 1)h], n = 0, 1, 2, \dots$ . Misalkan  $\left[\frac{t}{h}\right] = m$ . Dari (18) dan dengan menggunakan notasi  $x(n) = x(nh)$ , didapat model diskrit yang analog dengan model kontinu (16) dalam bentuk

$$x(n+1) = \frac{x(n)}{1 + p_0(n)h} - \frac{h}{1 + p_0(n)h} \sum_{i=1}^m p_i(n) x(n - m_i) \tag{19}$$

untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Sistem (19) adalah sistem diskrit analog dari (16).

### Persamaan Neuronik dengan Tundaan Bergantung Waktu

Selanjutnya diskritisasi nonstandar dengan teknik *piecewise constants arguments* diterapkan pada model jaringan saraf tipe Hopfield. Model ini diambil dari Gopalsamy dan Sariyasa (2002). Pandang persamaan neuronik dengan tundaan bergantung waktu dan fungsi aktivasi  $\tanh(x)$  dalam bentuk

$$\frac{dx(t)}{dt} = -a(t)x(t) + b(t) \tanh(x(t - \tau(t))) + f(t) \tag{20}$$

dengan  $a(\cdot), b(\cdot), f(\cdot)$  menyatakan fungsi bernilai riil kontinu yang terdefinisi pada  $(-\infty, \infty)$  serta periodik dengan periode  $\omega > 0$  (Gopalsamy dan Sariyasa, 2002). Tundaan  $\tau(t)$  terdefinisi pada  $(-\infty, \infty)$  serta diasumsikan kontinu dan periodik dengan periode  $\omega > 0$  yang memenuhi

$$\tau(t) \geq 0, t - \tau(t) > 0, 0 \leq \tau_* \leq \tau^* < \infty, t - \tau(t) \rightarrow \infty \text{ untuk } t \rightarrow \infty \text{ dimana } \tau_* = \inf_{t \in R} \tau(t) \text{ dan } \tau^* = \sup_{t \in R} \tau(t).$$

Persamaan (20) dilengkapi dengan kondisi awal dalam bentuk

$x(s) = \varphi(s), s \in [-\tau^*, 0], \varphi \in C[-\tau^*, 0]$  dengan  $C[-\tau^*, 0]$  menyatakan ruang fungsi bernilai riil kontinu yang terdefinisi pada  $[-\tau^*, 0]$ . Ruang ini dilengkapi dengan norm supremum  $\|\cdot\|$  yang didefinisikan oleh

$$\|x(t)\| = \sup_{s \in [-\tau^*, 0]} |x(t + s)|$$

Dalam Gopalsamy dan Sariyasa (2002) telah dirumuskan dan dibuktikan teorema berikut yang menjamin eksistensi solusi periodik dengan periode  $\omega$  yang stabil global.

**Teorema 2.** Misal  $a(\cdot), b(\cdot), f(\cdot)$ , dan  $\tau(\cdot)$  kontinu dan periodik dalam  $t \in R$  dengan periode  $\omega > 0$ . Misalkan  $a(t) \geq a^* > 0$ . Misalkan pula  $\tau(\cdot)$  terdiferensialkan dan memenuhi

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau(t) &\leq \tau^* < \infty, t \in R, \omega > \tau^* \\ \frac{d\tau(t)}{dt} &\leq \alpha < 1, t \in R \\ t - \tau(t) &> 0, t - \tau(t) \rightarrow \infty \text{ jika } t \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{21}$$

Misalkan  $|b(t)| \leq b^*$  untuk  $t \in R$ . Jika

$$a^* > \frac{b^* e^{a^* \tau^*}}{1 - \alpha} \geq 0$$

$$\left( 1 + \frac{b^* e^{a^* \tau^*}}{1 - \alpha} \tau^* \right) \times$$

$$\exp \left( - \left( a^* - \frac{b^* e^{a^* \tau^*}}{1 - \alpha} \right) \right) (\omega - \tau^*) = \rho < 1$$

(22)

Maka (1.20) mempunyai solusi periodik dengan periode  $\omega$  yang stabil global.

Dalam Teorema 2,

$$a^* = \max_{0 \leq t \leq \omega} a(t), b^* = \max_{0 \leq t \leq \omega} |b(t)|,$$

$$\tau^* = \sup_{t \in R} \tau(t).$$

### Model Diskrit Persamaan Neuronik

Formulasi model diskrit didasarkan atas teknik yang dikembangkan oleh Györi (1991) dan menggunakan hasil-hasil yang diperoleh oleh Gopalsamy dan Mohamad (2002). Dengan proses diskritisasi menggunakan persamaan (17) – (19) didapat model diskrit yang analog dengan model kontinu (20) dalam bentuk

$$x(n+1) = \frac{x(n)}{1 + a(n)h} + \frac{b(n)h}{1 + a(n)h} \tanh(x(n - k(n)) + \frac{f(n)h}{1 + a(n)h}$$

(23)

untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$

Untuk keperluan simulasi, dipilih parameter  $a(t)$  dan  $b(t)$  serta stimulus eksternal  $f(t)$  sebagai berikut:

$$a(t) = 1 - 0,8 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

$$b(t) = 0,01 \cos^2\left(\frac{\pi t}{3}\right) \quad (24)$$

$$f(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

dan  $\tau(t)$  diberikan oleh

$$\tau(t) = 2,5 + 0,5 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

Dapat diverifikasi bahwa untuk  $t \in R$ ,  $0 \leq \tau(t) \leq \tau^* = 3$  dan  $d\tau(t)/dt \leq \pi/6 < 1$ . Juga  $t - \tau(t) \rightarrow \infty$  jika  $t \rightarrow \infty$  dan  $t - \tau(t) > 0$  untuk  $t > 2,2$ . Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa kondisi kestabilan dalam Teorema 2 terpenuhi sehingga sistem (20) mempunyai solusi periodik dengan periode 4 yang stabil global.

Dalam bentuk diskrit, (24) menjadi

$$a(n) = 1 - 0,8 \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

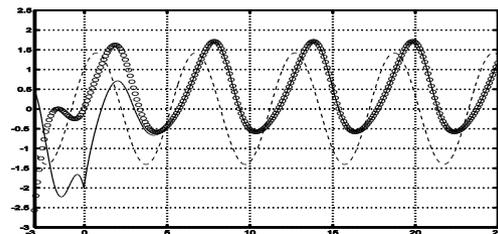
$$b(n) = 0,01 \cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right) \quad (25)$$

$$f(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Sedangkan bentuk diskrit dari  $\tau(t)$  diberikan oleh

$$\tau(n) = 2,5 + 0,5 \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \quad (26)$$

Simulasi numerik diperoleh menggunakan (23), (25), dan (26). Hasilnya disajikan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Dua solusi periodik dari (20). Grafik putus-putus

adalah stimulus eksternal

### SIMPULAN DAN SARAN

Dengan menggunakan teknik *piecewise constant argument*, telah diformulasikan skema numerik untuk hampiran solusi dari persamaan diferensial tundaan. Skema numerik ini mendiskritisasi model kontinu dengan tetap mempertahankan karakteristik dinamikanya. Akibatnya, model diskrit sebagai hasil diskritisasi model kontinu mempunyai dinamik yang ekuivalen dengan dinamik model kontinunya. Model diskrit ini merupakan model komputasi yang dapat digunakan untuk simulasi numerik model kontinu. Simulasi numerik menunjukkan bahwa secara dinamik, model diskrit ekuivalen dengan model kontinu.

Meskipun simulasi numerik menunjukkan bahwa model diskrit secara dinamik ekuivalen dengan model kontinu, namun perlu ada kajian secara analitis deduktif untuk menunjukkan bahwa karakteristik dinamik kedua model ekuivalen. Hal ini perlu menjadi kajian di masa mendatang.

### DAFTAR PUSTAKA

- Baker, C. T. H., Bocharov, G. A., dan Rihan, F. A. (1999). A Report on the Use of Delay Differential Equations in Numerical Modelling in the Biosciences. Numerical Analysis Report No 343. Manchester University.
- Bellen dan Zennaro. (2003). *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford: Clarendon Press.
- Broomhead, D. S. dan Iserles, A. (1992). *The dynamics of numerics and the numerics of dynamics*. Oxford: Clarendon Press.
- Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd Edition. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Driver, R. D. (1977). *Ordinary and delay differential equations*. New York : Springer-Verlag.
- El'sgol'ts, L. E. dan Norkin, S. B. (1973). *An introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. New York: Academic Press.
- Gopalsamy, K dan Sariyasa. (2002). Time delays and stimulus-dependent pattern formation in periodic environments in isolated neurons. *IEEE Trans. Neural Networks* 13: 551–563.
- Gopalsamy, K dan Mohamad, S. (2002). Neuronal dynamics under periodic stimuli. *International Journal of Neural Systems* 12: 137–148.
- Gopalsamy, K. (1992). Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht.
- Gyori, I. (1991). On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments. *Internat. J. Math. & Math. Sci.* 14: 111–126.

- Iserles, A. (1990). Stability and dynamics of numerical methods for nonlinear ordinary differential equations. *IMA J. Numer. Anal.* **10**, 1-30.
- Kuang, Y. (1993). *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc. Boston.
- Mickens, R. E. (1994). *Nonstandard finite difference models of differential equations*. Singapore: World Scientific.
- Mohamad, S. (2000). Continuous and discrete dynamical systems with applications. (dissertation). Flinders University.
- Nelson, P. W., Murray, J. D. dan Perelson, A. S. L. (2000). A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay. *Math. Biosci.*, **163**: 201 – 215.
- Prufer, M. (1985). Turbulence in multisteps methods for initial value problems. *SIAM J. Appl. Math.* **45**, 32-69.
- Sariyasa. (2005). "On the stability of neural networks in periodic environment" dalam *Proceeding of the International Conference on Applied Mathematics*. Bandung : ITB.
- Seydel, R. (1988). *From equilibrium to chaos: practical bifurcation and stability analysis*. New York: Elsevier.
- Smolen, P., Baxter, D., dan Byrne, J. (2002). A reduced model clarifies the role of feedback loops and time delays in the *Drosophila* circadian oscillator. *Biophys. J.* **83**, 2349–2359.
- Stewart, I. (1992). Warning – Handle with care. *Nature* **355**, 16-17.
- Stuart, A. M. dan Humphries, A. R. (1996). *Dynamical systems and numerical analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Stutzer, M. J. (1980). Chaotic dynamics and bifurcation in a macro model. *Jour. Econ. Dyn. and Control* **2**, 353—376.
- Turchin, P. (1990). Rarity of density dependence or population regulation with lags. *Nature*, **344**, 660–663.
- Turchin, P. dan Taylor, A. D. (1992). Complex dynamics in ecological time series. *Ecology*, **73**, 289–305.
- Ushiki, S. (1982). Central difference scheme and chaos. *Physica D* **4**, 407-424.
- Villasana, M. dan Radunskaya, A. (2003). A delay differential equation model for tumor growth. *J. Math. Biol.*, **47**, 270–294.
- Yee, H.C., Sweby, P. K., dan Griffiths, D. F. (1991). Dynamical approach study of spurious steady-state numerical solutions of nonlinear differential equations. I. The dynamics of time discretization and its implications for algorithm development in computational fluid dynamics. *J. Comput. Phys.* **97**, 249 – 310.