INTEGRAL CHOQUET

PUTU KARTIKA DEWI
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
UNDIKSHA putu.kartika.d@gmail.com

RINI INDRATI
DOSEN JURUSAN MATEMATIKA FMIPA
UGM rinii@ugm.ac.id atau
ch.rini_indrati@yahoo.com

Intisari

Diberikan himpunan tak kosong X dan aljabar-σ $\mathcal{F} \subset 2^X$. Ukuran non aditif μ pada ruang terukur $(X, \mathcal{F})$ yang dimaksud adalah fungsi monoton $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ dengan $\mu(\emptyset) = 0$. Pada paper ini dibahas integral berdasarkan ukuran non aditif tersebut, yang dikenal sebagai integral Choquet. Secara umum integral Choquet tidak aditif. Dengan menggunakan interpreter, ditunjukkan hubungan antara kekomonotonikan pasangan fungsi dengan keaditifan integral Choquet dari pasangan fungsi terukur tersebut. Dengan memanfaatkan keaditifan integral Choquet dari pasangan fungsi komonotonik dan Lemma Urysohn dibuktikan bahwa dalam kasus X merupakan ruang Hausdorff kompak lokal dan μ merupakan ukuran non aditif reguler, integral Choquet dari fungsi non negatif dapat diaproksimasi oleh integral Choquet dari suatu fungsi kontinu dengan support kompak. Selanjutnya, teorema kekonvergenan monoton berlaku di dalam integral Choquet dengan syarat ukuran non aditif μ semikontinu bawah. Sedangkan, teorema kekonvergenan terdominasi berlaku di dalam integral Choquet dengan syarat ukuran non aditif μ semikontinu atas dan subaditif.

Kata kunci : ukuran non aditif, integral Choquet.

Abstract

Let X be a nonempty set and $\mathcal{F} \subset 2^X$ be a σ-algebra. A non additive measure μ on a measurable space (X, F) is a monotone function $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ with $\mu(\emptyset) = 0$. In this paper we discuss an integral with respect to a non additive measure, that is called the Choquet integral. In general, the Choquet integral is not additive. By using interpreters, we show the relationship of comonotonicity of functions and additivity of its integral. By using that relationship and the Urysohn Lemma we prove that, in case X is a locally compact Hausdorff space and μ is a regular non additive measure, the Choquet integral of a non negative function can be approximated by the Choquet integral of a continuous function with compact support. Further, the monotone convergence theorem holds in the Choquet integral if the non additive measure μ is semicontinuous from below. Meanwhile, the dominated convergence theorem holds in the Choquet integral if the non additive measure μ is semicontinuous from above and subadditive.

Keywords : non aditive measure, Choquet integral.

1. Pendahuluan

Diberikan himpunan tak kosong X dan aljabar- $\mathcal{F} \subset 2$. Pasangan $(X, \mathcal{F})$ disebut dengan ruang terukur. Himpunan $A \subset X$ disebut himpunan terukur jika $A \in \mathcal{F}$. Fungsi $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terukur jika untuk setiap $r \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in X: f(x) > r\} \in \mathcal{F}$.

Pada pembahasan aproksimasi integtral Choquet suatu fungsi terukur dengan integral Choquet suatu fungsi kontinu, X diasumsikan sebagai ruang Hausdorff kompak lokal. Jika X merupakan ruang Hausdorff kompak lokal, $C \subset X$ kompak, dan $U \subset X$ terbuka dengan $C \subset U$, maka terdapat himpunan terbuka V dengan $\bar{V}$ kompak dan $C \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Lebih lanjut berlaku Lemma Urysohn sebagai berikut.

Teorema 1.1. (Lemma Urysohn) *Diketahui X merupakan ruang Hausdorff kompak lokal. Jika $K \subset X$ kompak dan V merupakan himpunan bagian terbuka di X sehingga $K \subset V$, maka terdapat fungsi kontinu dengan support kompak $f: X \longrightarrow [0, 1]$ sehingga $f(k) = 1$, untuk setiap $k \in K$, dan $supp(f) \subset V$.*

2. Ukuran non aditif

Definisi 2.1. *Diberikan ruang terukur $(X, \mathcal{F})$. Fungsi $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ disebut ukuran non aditif pada $(X, \mathcal{F})$ jika*

(1). $\mu(\emptyset) = 0$

(2). *untuk setiap $E, F \in \mathcal{F}$, dengan $E \subset F$, berlaku $\mu(E) \leq \mu(F)$.*

Selanjutnya, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ disebut ruang ukuran non aditif. Ukuran non aditif μ dikatakan terbatas jika $\mu(X) < \infty$.

Setiap ukuran merupakan ukuran non aditif, sebab sifat aditif pada ukuran menyebabkan ukuran tersebut monoton.

Definisi 2.2. *Diberikan ruang ukuran non aditif $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Ukuran non aditif μ dikatakan semikontinu bawah jika untuk setiap barisan himpunan $\{E_n\}$ dengan $E_n \subset E_{n+1}$ untuk setiap n berlaku*

$$\lim_{n\to} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1} E_n\right).$$

Ukuran non aditif μ dikatakan semikontinu atas jika untuk setiap barisan himpunan $\{E_n\}$ dengan $E_n \supset E_{n+1}$ untuk setiap n berlaku

$$\lim_{n\to} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1} E_n\right).$$

Lebih lanjut, μ dikatakan kontinu jika μ semikontinu atas dan semikontinu bawah.

Jika ukuran non aditif μ terbatas, dapat didefinisikan konjugat μ, ditulis μ^c, didefinisikan sebagai $\mu^c(A) = \mu(X) - \mu(A^c)$ untuk setiap $A \in \mathcal{F}$. Konjugat μ juga merupakan ukuran non aditif pada ruang terukur $(X, \mathcal{F})$. Lebih lanjut, μ semikontinu bawah jika dan hanya jika μ^c semikontinu atas.

Ukuran non aditif μ dikatakan subaditif jika untuk sebarang $A, B \in \mathcal{F}$ sehingga $A \cap B = \emptyset$ berlaku $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Selain itu, jika $\mathfrak{B} \subset 2$ merupakan keluarga himpunan Borel, $\mathfrak{C} \subset 2$ merupakan keluarga himpunan kompak, $\mathcal{G} \subset 2$ merupakan keluarga himpunan terbuka dapat didefinisikan ukuran non aditif reguler sebagai berikut.

Definisi 2.3. *Diketahui μ merupakan ukuran non aditif pada ruang terukur* $(X, \mathfrak{B})$. *Ukuran non aditif μ dikatakan reguler jika*

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G): G \in \mathcal{G}, G \supset B\},$$
untuk setiap $B \in \mathfrak{B}$ *dan*
$$\mu(G) = \sup\{\mu(C): C \in \mathfrak{C}, C \subset G\},$$
untuk setiap $G \in \mathcal{G}$.

3. Definisi dan Sifat-sifat Integral Choquet

Definisi 3.1. *Diberikan ruang terukur* $(X, \mathcal{F})$, $A \in \mathcal{F}$, *fungsi terukur non negatif* f *dan* $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty]$ *merupakan ukuran non aditif. Didefinisikan*

$$(C)\int_A f\, d\mu = \int_{[0,\infty)} G_{\mu,f,A}\, dm,$$

dengan $G_{\mu,f,A}(r) = \mu(\{x \in A: f(x) \geq r\})$, untuk setiap $r \in [0, \infty)$. *Fungsi terukur non negatif f dikatakan terintegral Choquet terhadap ukuran non aditif μ pada A jika*

$$(C)\int_A f\, d\mu < \infty.$$

Lebih lanjut, $(C)\int_A f\, d\mu$ *disebut sebagai nilai integral Choquet fungsi f terhadap ukuran non aditif μ pada himpunan terukur A. Selanjutnya,* $(C)\int\ f\, d\mu$ *ditulis dengan* $(C)\int f\, d\mu$.

Dalam kasus $G_{\mu,f,A}(r) \in \mathbb{R}$ untuk setiap $r \in [0, \infty)$, integral Choquet dari fungsi terukur non negatif f pada himpunan terukur A dapat didefinisikan sebagai

$$(C)\int_A f\, d\mu = \int_0^\infty G_{\mu,f,A}(r)\, dr,$$

dengan integral pada ruas kanan merupakan integral Riemann tak wajar. Dari Definisi 3.1 dapat ditunjukkan beberapa sifat integral Choquet, sebagai berikut.

Teorema 3.2. *Diberikan fungsi terukur non negatif* f *dan* g *pada ruang ukuran non aditif* $(X, \mathcal{F}, \mu)$, *dan* $A, B \in \mathcal{F}$, *maka*

(1). $(C)\int_A 1\, d\mu = \mu(A)$.

(2). $(C)\int_A f\, d\mu = (C)\int f\mathcal{X}_A\, d\mu$.

(3). *Jika* $f \leq g$ *pada* A, *maka* $(C)\int_A f\, d\mu \leq (C)\int_A g\, d\mu$.

(4). *Jika* $A \subset B$ *maka* $(C)\int_A f\, d\mu \leq (C)\int_B f\, d\mu$.

Jika $\mu(A) < \infty$, akan didefinisi-kan integral Choquet untuk suatu fungsi terukur. Fungsi terukur f dikatakan terintegral Choquet pada A jika fungsi f^+ terintegral Choquet terhadap μ pada A dan f^- terintegral Choquet terhadap μ^c pada A. Selanjutnya integral Choquet terhadap ukuran non aditif μ pada A ditulis dengan $(C)\int_A f\, d\mu$ didefinisikan sebagai $(C)\int_A f\, d\mu = (C)\int_A f^+\, d\mu - (C)\int_A f^-\, d\mu^c$.

Sifat-sifat integral Choquet untuk fungsi terukur akan diberikan pada teorema berikut.

Teorema 3.3. *Diberikan fungsi terukur f dan g pada ruang ukuran non aditif terbatas* $(X, \mathcal{F}, \mu)$, *dan* $A \in \mathcal{F}$, *maka*

(1). $(C)\int_A f\, d\mu = (C)\int f\mathcal{X}_A\, d\mu$.

(2). Jika $f \leq g$ *pada* A*, maka* $(C)\int_A f\,d\mu \leq (C)\int_A g\,d\mu$.

Dalam kasus ukuran non aditif yang digunakan merupakan ukuran Lebesgue, integral Choquet pada himpunan berukuran terbatas sama dengan integral Lebesgue. Namun tidak seperti integral Lebesgue, integral Choquet secara umum tidaklah aditif, dalam artian terdapat ukuran non aditif μ pada suatu ruang terukur $(X, \mathcal{F})$ dan fungsi terukur f dan g pada X sehingga $(C)\int(f+g)\,d\mu \neq (C)\int f\,d\mu + (C)\int g\,d\mu$.

Akan diselidiki prasyarat yang menjamin bahwa integral Choquet dapat bersifat aditif. Akan diselidiki hubungan antara kekomonotonikan fungsi dengan keaditifan integral Choquetnya. Fungsi terukur f dan g dikatakan komonotonik, ditulis dengan $f \sim g$, jika $f(x) < f(x') \Rightarrow g(x) \leq g(x')$ untuk setiap $x, x' \in X$. Untuk menyelidiki hubungan antara kekomonotonikan fungsi terukur dengan kelinearan integral Choquetnya, akan dipaparkan konsep interpreter.

Definisi 3.4. *Diberikan ruang terukur* $(X, \mathcal{X})$ *dan* $(Y, \mathcal{Y})$*, yaitu* $\mathcal{X}$ *merupakan* aljabar-σ *pada* X *dan* $\mathcal{Y}$ *merupakan* aljabar-σ *pada* Y*. Suatu fungsi* $H: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ *disebut interpreter untuk himpunan terukur jika* H *memenuhi :*

(1) $H(\emptyset) = \emptyset$ *dan* $H(X) = Y$.

(2) $H(A) \subset H(B)$ *jika* $A \subset B$.

Triplet $(Y, \mathcal{Y}, H)$ *disebut bingkai dari* $(X, \mathcal{X})$ *jika* H *interpreter dari* $\mathcal{X}$ *ke* $\mathcal{Y}$.

Definisi 3.5. *Diketahui* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *adalah ruang ukuran non aditif* μ*. Kuadruplet* $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$ *disebut representasi dari* μ *(atau dari* $(X, \mathcal{X}, \mu)$*), jika* H *interpreter dari* $\mathcal{X}$ *ke* $\mathcal{Y}$*,* m *merupakan ukuran klasik pada* $(Y, \mathcal{Y})$ *dan* $\mu = m \circ H$.

Setiap ukuran non aditif μ pada ruang terukur $(X, \mathcal{X})$ mempunyai representasi. Oleh karena itu dapat didefinisikan interpreter untuk fungsi terukur. Diberikan ruang terukur $(X, \mathcal{X})$ dan $(Y, \mathcal{Y})$, H interpreter dari $\mathcal{X}$ ke $\mathcal{Y}$ dan fungsi terukur non negatif f pada X. Didefinisikan fungsi η_f pada Y sehingga untuk setiap $y \in Y$, $\eta_f(y) = sup\{r : y \in H(\{f \geq r\})\}$. Lebih lanjut, diberikan M^+ himpunan semua fungsi terukur non negatif pada X dan T^+ himpunan semua fungsi terukur non negatif pada Y. Di-definisikan fungsi $\eta: M^+ \longrightarrow T^+$ dengan $\eta(f) = \eta_f$ untuk setiap $f \in M^+$. Fungsi η disebut interpreter untuk fungsi terukur yang dibangun oleh H. Interpreter fungsi terukur non negatif f di $y \in Y$ juga dapat dinyatakan sebagai

$$\eta(f)(y) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{X} \\ y \in H(A)}} \inf_{x \in A} f(x).$$

Oleh karena itu, jika f dan g adalah fungsi terukur non negatif yang komonotonik maka $\eta(f+g) = \eta(f) + \eta(g)$. Hubungan antara integral Choquet, interpreter, dan integral Lebesgue diberikan pada teorema berikut.

Teorema 3.6. *Diberikan ruang terukur* $(X, \mathcal{X})$ *dan bingkai* $(Y, \mathcal{Y}, m, H)$*, dengan* $Y = \big(0, \mu(X)\big)$ *dan* m *ukuran Lebesgue pada* $\mathcal{Y}$.

Untuk sebarang fungsi terukur non negatif f pada X berlaku

$$(C)\int f\,d\mu = \int \eta(f)\,dm,$$

dengan integral di ruas kanan merupakan integral Lebesgue.

Diperhatikan Teorema 3.6 dan untuk sebarang bilangan real non negatif a berlaku $\eta(af) = a\eta(f)$, diperoleh $(C)\int af\,d\mu = a(C)\int f\,d\mu$.

Teorema 3.7. *Diberikan ruang ukuran non aditif $(X,\ \mathcal{X},\ \mu)$, bingkai $(Y,\ \mathcal{Y}, m,\ H)$ untuk μ dan η merupakan interpreter yang dibangun oleh H. Untuk setiap pasang (f, g) fungsi terukur non negatif pada X, pernyataan di bawah ini ekuivalen.*

(1) $f \sim g$.
(2) $\eta(f+g) = \eta(f) + \eta(g)$.
(3) $(C)\int (f+g)\,d\mu = (C)\int f\,d\mu + (C)\int g\,d\mu$.

Akibat 3.8. *Diberikan ruang ukuran non aditif terbatas $(X,\ \mathcal{F},\ \mu)$. Jika (f, g) fungsi terukur pada X yang komonotonik dan $\{x: f(x)g(x) < 0\} = \emptyset$ maka $(C)\int (f+g)\,d\mu = (C)\int f\,d\mu + (C)\int g\,d\mu$.*

4. Aproksimasi Integral Choquet

Pada sub bab ini diasumsikan bahwa X merupakan ruang Hausdorff kompak lokal dan μ merupakan ukuran reguler. Akan ditunjukkan bahwa integral Choquet dari suatu fungsi yang terintegral dapat dihampiri oleh integral dari suatu fungsi sederhana dan fungsi kontinu dengan beberapa teorema berikut.

Teorema 4.1. *Diketahui μ ukuran non aditif dan f merupakan fungsi non negatif yang terintegral Choquet terhadap μ. Terdapat $M_i \in \mathfrak{B}$ dan bilangan $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ sehingga $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n$, $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, dan*

$$\left|(C)\int f\,d\mu - \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(M_i)\right| < \varepsilon.$$

Bukti: Terdapat $M \in \mathbb{R}$ sehingga $(C)\int f\,d\mu = \int_{[0,\infty)} G_{\mu,f}\,dm = M$. Selanjutnya, terdapat $a', b' \in \mathbb{R}$ sehingga $\left|\int_{a'}^{b'} G_{\mu,f}(r)dr - M\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Menurut definisi integral Riemann, terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{r_0 = b', r_1, r_2, \dots, r_n = a'\}$ dengan maks$\{\Delta_i\, r = r_{i-1} - r_i\} < \delta$ berakibat $\left|\int_0^{b'} G_{\mu,f}(r)dr - \sum_{i=1}^{n} G_{\mu,f}(r_i^*)\ \Delta_i\, r\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dengan $r_i^* \in [r_i, r_{i-1}]$. Untuk setiap $i = 1, 2,\ 3, \dots, n$ didefinisikan $M_i = \{x: f(x) \geq r_i^*\}$ dan $a_i = \Delta_i\, r = r_{i-1} - r_i$. ■

Dengan memperhatikan definisi ukuran reguler, hubungan kekomonotonikan fungsi terukur dengan keaditifan integralnya dan menggunakan Lemma Urysohn dapat dibuktikan teorema berikut.

Teorema 4.2. *Diberikan ukuran non aditif reguler μ pada $(X, \mathfrak{B})$, $M_i \in \mathfrak{B}$ dan bilangan $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ dengan $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n$, $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $\mu(M_n) < \infty$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi kontinu $g \in K^+$ sehingga*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\mu(M_i) - (C)\int g\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Bukti: Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena μ merupakan ukuran non aditif reguler dan $M_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, maka untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ terdapat himpunan terbuka $G_i \in \mathcal{G}$ dengan $G_i \supset M_i$ dan $\mu(G_i) < \mu(M_i) + \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ serta himpunan kompak $C_i \in \mathfrak{C}$ dengan $C_i \subset G_i$ dan $\mu(G_i) < \mu(C_i) + \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} a_n}$.

Diperhatikan bahwa X merupakan ruang Hausdorff kompak lokal, maka untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ terdapat himpunan terbuka $G_i(1)$ dengan $\overline{G_i(1)}$ kompak dan $C_i \subset G_i(1) \subset \overline{G_i(1)} \subset G_i$. Didefinisikan $G_1'(1) \coloneqq G_1(1)$, maka himpunan terbuka $G_1(0)$ dengan $\overline{G_1(0)}$ kompak dan $\overline{G_1'(1)} \subset G_1(0) \subset \overline{G_1(0)} \subset G_1$.

Didefinisikan $G_2'(1) \coloneqq G_1(0) \cup G_2(1)$, diperoleh $G_2'(1)$ merupakan himpunan terbuka dan $\overline{G_2'(1)}$ kompak. Oleh karena itu, terdapat himpunan terbuka $G_2(0)$ dengan $\overline{G_2(0)}$ kompak dan $\overline{G_2'(1)} \subset G_2(0) \subset \overline{G_2(0)} \subset G_2$. Untuk $k \geq 2$, didefinisikan $G_{k+1}'(1) = G_{k+1}(1) \cup G_k(0)$, maka diperoleh $\overline{G_{k+1}'(1)}$ kompak, dan $C_{k+1} \subset G_{k+1}'(1) \subset \overline{G_{k+1}'(1)} \subset G_{k+1}$. Oleh karena itu, terdapat himpunan terbuka $G_{k+1}(0)$ sehingga $\overline{G_{k+1}(0)}$ dan $\overline{G_{k+1}'(1)} \subset G_{k+1}(0) \subset \overline{G_{k+1}(0)} \subset G_{k+1}$. Proses diteruskan sampai $k = n - 1$.

Dengan menerapkan Lemma Urysohn, untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ terdapat fungsi kontinu dengan support kompak $f_i : X \longrightarrow [0, 1]$ sehingga $f_i(x) = 1$ untuk setiap $x \in \overline{G_i'(1)}$, dan $supp(f_i) \subset G_i(0)$. Diperhatikan bahwa $f_1, f_2, \dots, f_n$ komonotonik satu sama lain dan $\chi_{C_i} \leq f_i \leq \chi_{G_i}$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Diperoleh

$$\left|(C) \int f_i \, d\mu - \mu(M_i)\right| < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Didefinisikan $g \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, maka g merupakan fungsi kontinu dengan support kompak pada X dan $|(C) \int g \, d\mu - \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(M_i)| < \varepsilon$. ■

Dari Teorema 4.1 dan Teorema 4.2, dapat dihasilkan teorema berikut.

Teorema 4.3. *Diberikan ukuran non additif reguler μ dan fungsi non negatif terintegral Choquet f pada ruang terukur $(X, \mathfrak{B})$ dengan X merupakan ruang Hausdorff kompak lokal. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi $g \in K^+$ sehingga*

$$|(C) \int f \, d\mu - (C) \int g \, d\mu| < \varepsilon.$$

5. Teorema Kekonvergenan

Pada bagian ini diselidiki apakah teorema kekonvergenan monoton dan teorema kekonvergen-an terdominasi tetap berlaku pada integral Choquet.

Teorema 5.1. (Teorema Kekonver-genan Monoton)
Diberikan ruang ukuran non aditif $(X, \mathcal{F}, \mu)$ dengan μ semikontinu bawah (semicontinous from below). Untuk sebarang barisan monoton naik fungsi terukur non negatif $\{f_n\}$ yang terintegral Choquet dan konvergen ke fungsi f maka

$$(C) \int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} (C) \int f_n \, d\mu.$$

Bukti: Diperhatikan bahwa jika $\{f_n\}$ merupakan barisan monoton naik fungsi terukur non negatif konvergen ke fungsi f dan μ semikontinu bawah maka $\{G_{\mu, f_n}\}$ merupakan barisan monoton naik dan konvergen ke $G_{\mu, f}$. Dengan memperhatikan teorema kekonvergenan monoton di dalam integral Lebesgue dengan domain $[0,\infty)$, teorema 4.3.1 terbukti. ■

Diperhatikan bahwa μ semikontinu atas jika dan hanya jika μ^c semikontinu bawah, maka akibat 5.2 berlaku.

Akibat 5.2. *Diberikan ruang ukuran non aditif terbatas $(X,\mathcal{F},\mu)$ dengan μ semikontinu atas (semicontinous from above). Untuk sebarang barisan monoton turun fungsi terukur non positif $\{f_n\}$ yang terintegral Choquet dan konvergen ke fungsi f maka*

$$(C)\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}(C)\int f_n\,d\mu.$$

Teorema 5.3. (Teorema Kekonvergenan Terdominasi)
Diberikan ruang ukuran non aditif terbatas $(X,\mathcal{F},\mu)$ dengan μ subaditif dan barisan fungsi terintegral Choquet $\{f_n\}$ sehingga terdapat fungsi terintegral Choquet g dan h yang memenuhi $g \le f_n \le h$, untuk setiap $n\in\mathbb{N}$.. Jika $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke f dan μ semikontinu atas maka f terintegral dan

$$\lim_{n\to\infty}(C)\int f_n\,d\mu = (C)\int f\,d\mu.$$

Bukti: Diperhatikan bahwa μ semikontinu atas dan $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke f maka $\lim_{n\to\infty} G_{\mu,|f_n-f|}(r) = 0$ kecuali untuk paling banyak terhitung r. Selanjutnya, karena μ subaditif maka $\lim_{n\to\infty} G_{\mu,f_n}(r) = G_{\mu,f}(r)$, kecuali untuk paling banyak terhitung r. Diperhatikan bahwa $g \le f_n \le h$ untuk setiap $n\in\mathbb{N}$, maka untuk setiap $n\in\mathbb{N}$, diperoleh $G_{\mu,g^+} \le G_{\mu,f_n^+} \le G_{\mu,h^+}$. Akibatnya, menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, fungsi G_{μ,f^+} pada $E=[0,\infty)$ terintegral dan

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)} G_{\mu,f_n^+}(r)dr = \int_{[0,\infty)} G_{\mu,f^+}(r)dr.$$

Ekuivalen menyatakan bahwa

$$\lim_{n\to\infty}(C)\int f_n^{\,+}\,d\mu = (C)\int f^+\,d\mu.$$

Diperhatikan bahwa untuk $r\in(-\infty,0]$,

$$G_{\mu,g}(r)-\mu(X) \le G_{\mu,f_n}(r)-\mu(X) \le G_{\mu,h}(r)-\mu(X).$$

Diperhatikan bahwa $\lim_{n\to} G_{\mu,f_n}(r) = G_{\mu,f}(r)$. Akibatnya, menurut Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, fungsi $G_{\mu,f}(r)-\mu(X)$ pada interval $(-\infty,0]$ terintegral dan

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{0}\left(G_{\mu,f_n}(r)-\mu(X)\right)dr = \int_{-\infty}^{0}\left(G_{\mu,f}(r)-\mu(X)\right)dr.$$

Diperoleh,

$$\lim_{n\to\infty}(C)\int f_n^{\,-}\,d\mu^c = (C)\int f^-\,d\mu^c.$$

Akibatnya diperoleh,

$$\lim_{n\to\infty}(C)\int f_n\,d\mu = (C)\int f\,d\mu. \quad ■$$

Teorema 5.3 juga berlaku jika syarat μ semikontinu atas diganti dengan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f.

REFERENSI

[1]. Choquet, G., Theory of Capacities. *Ann. Inst. Fourier, Tome* 5 (1954) 131-295.

[2]. Denneberg D., *Non* Additive *Measure and Integral.*

Dordorecht: Kluwer Academic Publishers. 1994.

[3]. Grabisch, M. and Labreuche C., A Decade of Application of The Choquet and Sugeno Integrals in Multi-criteria Decision Aid. *Ann. Oper. Res.* 175 (2010) 247-286.

[4]. Halmos, P.R., *Measure Theory.* Springer-Verlag. *New York.* 1974.

[5]. Heilpern, S., Using Choquet Integral in Economics. *Statistical Papers (Springer-Verlag)* 43 (2002) 53-73.

[6]. Jang, L.C, B.M. Kil, Y.K. Kim, J.S. Kwon., Some Properties of Choquet Integral of Set-Valued Functions. *Fuzzy Sets and System* 91 (1997) 95-98.

[7]. Murofushi T. and Sugeno M., A Theory of Fuzzy Measure : Representations, The Choquet Integral and Null Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 159 (1991) 532-549.

[8]. Narukawa Y. and Murofushi T., Regular Non-additive Measure and Choquet integral. *Fuzzy Sets and System* 143 (2004), 487-492.

[9]. Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis.* Pearson Education Asia Limited and China Machine Press. 2010.

[10]. Sugeno M., Murofushi T., and Narukawa Y., Choquet Integral and Fuzzy Measure on Locally Compact Space. *Fuzzy Sets and System* 99 (1998) 205-211.

[11]. Wang Z. and Klir G. J., *Generalized Measure Theory.* Springer. New York. 2009.

[12]. Wang, Z., Klir G. J., and Wang, W. Monotone Set Functions Defined by Choquet Integral. *Fuzzy Sets and System* 81 (1996) 241-250.