PERUMUMAN TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG METRIK *CONE*

I Nyoman Budayana[1]

Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja[1]

buda.caresoul@gmail.com

Abstrak

Di dalam naskah ini, dijelaskan tentang konsep ruang metrik *cone*, yang merupakan pengembangan dari ruang mertrik. Dari tulisan Long-Guang dan Xian (2007) dan dilengkapi oleh Rezapour dan Hamlbarani (2008), diberikan beberapa teorema titik tetap di ruang metrik *cone* untuk suatu pemetaan $T: X \rightarrow X$. Selanjutnya, Aage dan Salunke (2009) memberikan teorema titik tetap bersama dari dua pemetaan $T, S: X \rightarrow X$, dengan X merupakan ruang metrik *cone*. Teorema dari Aage dan Salunke (2009) ini sekaligus menunjukkan berlakunya satu dari beberapa teorema di dalam Long-Guang dan Xian (2007), namun tidak untuk satupun teorema dari Rezapour dan Hamlbarani (2008). Di dalam naskah ini, teorema yang diberikan oleh Aage dan Salunke (2009) diperumum dengan mengurangi beberapa syarat sehingga diperoleh suatu teorema titik tetap bersama yang berlaku lebih luas dan sekaligus mampu memperlihatkan berlakunya teorema dari Rezapour dan Hamlbarani (2008). Teorema yang diberikan oleh Rezapour dan Hamlbarani (2008) merupakan kejadian khusus dari teorema yang di hasilkan dari proses perumumam.

Kata kunci: teorema titik tetap, metrik *cone*

Abstract

In this paper, we explained the concept of a cone metric space which is a generalization of a metric space. From the papers of Long-Guang and Xian (2007) and Rezapour and Hamlbarani (2008) we got some fixed point theorems in cone metric spaces for the mapping $T: X \rightarrow X$. Furthermore, Aage and Salunke (2009) gave a common fixed point theorem for a pair of mapping $T, S: X \rightarrow X$, where X is a cone metric space. This theorem was able to prove one of the theorems in Long-Guang and Xian (2007), but none of the theorems in Rezapour and Hamlbarani (2008). So, in this paper, we generalized this theorem by reducing its conditions. Consequently, we got a new theorem which more established. This new theorem was able to prove the theorems in Rezapour and Hamlbarani (2008). The theorems in Rezapour and Hamlbarani (2008) are the special condition of the new theorem.

Keywords: fixed point theorem, cone metric

1. Pendahuluan

Konsep ruang metrik merupakan salah satu konsep dasar dalam matematika analisis. Selama bertahun-tahun, para peneliti mencoba mengembangkan konsep ruang metrik. Pada 2007, Long-Guang dan Xian mengembangkan konsep metrik dengan mengganti nilai metrik yang semula berupa bilangan real dengan suatu nilai di dalam ruang Banach real terurut. Di dalam ruang Banach tersebut, didefinisikan suatu himpunan tak kosong, dengan sifat-sifat tertentu, yang dinamakan *cone*. Dengan mengganti nilai metrik yang semula berupa bilangan real tak negatif menjadi suatu vektor di dalam *cone*, maka diperoleh suatu konsep baru, yang dinamakan metrik *cone*.

Salah satu teori yang erat kaitannya dengan ruang metrik adalah teori titik tetap. Di dalam Kreyszig (1978) dijelaskan bahwa suatu titik $x \in X$ disebut titik tetap dari pemetaan $T: X \rightarrow X$ jika $T(x) = x$. Teori titik tetap menarik untuk dipelajari karena memiliki banyak peranan, baik dalam pengembangan teori matematika maupun penerapannya, beberapa di antaranya adalah dalam permasalahan persamaan integral, persamaan diferensial, persamaan matriks, sistem dinamik, dan ekonomi. Selama ini, yang sudah umum digunakan adalah teorema titik tetap di ruang metrik.

Pengembangan teori titik tetap dapat dilakukan pada aspek dimana teorema tersebut diterapkan ataupun pada pemetaan yang digunakan. Dengan demikian, teorema titik tetap juga dapat diterapkan di ruang metrik *cone*, seperti yang diberikan dalam Long-Guang dan Xian (2007). Selain oleh Long-Guang dan Xian, teorema titik tetap di ruang metrik *cone* juga sudah dibahas oleh Rezapour dan Hamlbarani (2008), dengan mengabaikan kenormalan *cone* yang digunakan, dan juga oleh Aage dan Salunke (2009), dengan memberikan teorema titik tetap bersama dua pemetaan di dalam ruang metrik *cone*.

Teorema yang diberikan di dalam Aage dan Salunke (2009) dapat menjamin hanya satu teorema yang diberikan oleh Long-Guang dan Xian (2007). Oleh karena itu, teorema yang diberikan oleh Aage dan Salunke tersebut akan diperumum dengan memperlemah syarat-syaratnya, sehingga dapat menjamin beberapa teorema lain di dalam Long-Guang dan Xian (2007). Selain itu, pengembangan teorema akan dilakukan seperti pengembangan yang telah dilakukan oleh Rezapour dan Hamlbarani, yaitu dengan mengabaikan kenormalan dari *cone* yang digunakan. Dengan demikian, teorema baru yang diperoleh mampu menunjukkan berlakunya teorema-teorema yang diberikan dalam Rezapour dan Hamlbarani (2008).

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Terlebih dahulu dikumpulkan dan dipelajari literatur-literatur terkait. Tahap selanjutnya, dilakukan penyederhanaan terhadap relasi yang digunakan. Pada Long-Guang dan Xian (2007), Rezapour dan Hamlbarani (2008), dan Aage dan Salunke (2009), didefinisikan relasi yang relatif terhadap suatu *cone* P di dalam ruang bernorma E sebagai berikut. Untuk setiap $x, y \in E$ (i) $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in P$, (ii) $x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$ tetapi $x \neq y$, (iii) $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \text{int}P$. Di dalam naskah ini, hanya digunakan relasi (i) dan (ii). Oleh karena itu, diperlukan penyesuaian terhadap definisi dan sifat-sifat yang digunakan agar definisi yang diberikan masih ekuivalen dengan literatur-literatur sebelumnya.

Selanjutnya, dilakukan modifikasi pada teorema yang diberikan oleh Aage dan Salunke (2009), yaitu dengan memperlemah syarat berlakunya teorema tersebut dan juga dengan mengikuti pola perumuman yang sudah dilakukan oleh Rezapour dan Hamlbarani, yakni dengan mengabaikan kenormalan dari *cone* yang digunakan.

Terakhir, ditunjukkan bahwa teorema yang diberikan oleh Rezapour dan Hamlbarani merupakan kejadian khusus dari teorema baru yang telah dirumuskan.

3. Ruang Metrik *Cone*

Dalam Long-Guang dan Xian (2007), *cone* didefinisikan di dalam ruang Banach. Di sini, akan digunakan ruang bernorma untuk menggantikan ruang Banach. Diberikan ruang bernorma E atas lapangan $\mathbb{R}$. Himpunan $P \subseteq E$ disebut *cone* jika memenuhi:

(i) P tertutup, tak kosong, dan $P \neq \{0\}$,
(ii) $ax + by \in P, \forall x, y \in P, \forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$, dan
(iii) $-x, x \in P \Rightarrow x = 0$.

Untuk sebarang *cone* P di dalam ruang bernorma E, didefinisikan urutan parsial "$\preccurlyeq$" relatif terhadap P, dengan

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y - x \in P, \forall x, y \in E.$$

Didefinisikan pula relasi "$\prec$", dengan

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \text{ tetapi } x \neq y, \forall x, y \in E.$$

Pada pembahasan selanjutnya, notasi E akan digunakan untuk menyatakan suatu ruang bernorma, notasi P untuk menyatakan suatu *cone* di dalam E dengan $\text{int}P \neq \emptyset$ dan $\preccurlyeq$ merupakan urutan parsial terhadap P. Diperhatikan bahwa setiap *cone* selalu memuat vektor nol. Lebih lanjut, $0 \notin \text{int}P$.

Cone P dikatakan normal jika terdapat bilangan $K > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in E$, dengan $0 \preccurlyeq x \preccurlyeq y$, berlaku

$$\|x\| \leq K \|y\|.$$

Bilangan positif terkecil K yang memenuhi ketaksamaan diatas disebut konstanta normal P (Long-Guang & Xian, 2007).

Untuk setiap $x, y \in \text{int}P$ dan setiap bilangan $\alpha > 0$ berlaku $\alpha x \in \text{int}P$ dan $x + y \in \text{int}P$ (Rezapour & Hamlbarani, 2008). Selain itu, berlaku pula sifat-sifat berikut.

Lemma 3.1. *Diberikan $a \in E$. Jika untuk setiap $c \in intP$ berlaku $a \prec c$ maka $a \preccurlyeq 0$.*

Lemma 3.2. *Diberikan barisan* $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$. *Jika* $\{\alpha_n\}$ *konvergen ke* 0 *dan* $e \in E$ *maka untuk setiap* $c \in intP$, *terdapat bilangan asli* N, *sehingga untuk setiap* $n \geq N$ *berlaku* $-c \prec \alpha_n \cdot e \prec c$.

Dalam Long-Guang dan Xian (2007), definisi ruang metrik *cone* diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.3. (Long-Guang & Xian, 2007) *Diberikan himpunan tak kosong X dan cone P di dalam ruang bernorma E. Pemetaan* $d: X \times X \rightarrow E$ *disebut metrik cone pada X jika memenuhi:*

(i) $0 \preccurlyeq d(x,y), \forall\, x,y \in X$,

(ii) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$,

(iii) $d(x,y) = d(y,x), \forall\, x,y \in X$,

(iv) $d(x,y) \preccurlyeq d(x,z) + d(y,z), \forall\, x,y,z \in X$.

Lebih lanjut, (X,d) disebut ruang metrik cone.

Contoh 3.4. Diberikan himpunan tak kosong X dan suatu $n \in \mathbb{N}$. Diperhatikan bahwa $\mathbb{R}^n$ dilengkapi dengan norma

$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\}}, \forall\, \boldsymbol{x} \in X$,

merupakan ruang bernorma dan $P = \{\, (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \,\}$ merupakan *cone*. Jika $d_1, d_2, \cdots, d_n$ metrik pada X, maka pemetaan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ yang didefinisikan dengan

$d(x,y) = (d_1(x,y), d_2(x,y), \cdots, d_n(x,y))$,

untuk setiap $x,y \in X$, merupakan metrik *cone* pada *X*, sehingga (X,d) merupakan ruang metrik *cone*.

Untuk pembahasan selanjutnya, ruang metrik *cone* (X,d) yang dimaksud adalah ruang metrik *cone* terhadap suatu *cone* P di dalam ruang bernorma E.

Dari definisi di atas, jelas bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang metrik *cone*.

Definisi barisan konvergen dan barisan Cauchy diberikan sebagai berikut.

Definisi 3.5. *Diberikan ruang metrik cone* (X,d). *Barisan* $\{x_n\}$ *di dalam X dikatakan konvergen jika terdapat* $x \in X$, *sehingga untuk setiap* $c \in intP$, *terdapat* $N \in \mathbb{N}$, *sehingga untuk setiap* $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ *berlaku* $d(x_n, x) \prec c$. *Lebih lanjut,* $\{x_n\}$ *dikatakan konvergen ke x dan x disebut limit dari* $\{x_n\}$ *serta dapat dinotasikan dengan*

$$x_n \rightarrow x \text{ atau } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Definisi 3.6. *Diberikan ruang metrik cone* (X,d) *dan barisan* $\{x_n\}$ *di dalam X. Barisan* $\{x_n\}$ *disebut barisan Cauchy di X jika untuk setiap* $c \in intP$, *terdapat* $N \in \mathbb{N}$, *sehingga untuk setiap* $n,m \in \mathbb{N}$ *dengan* $n,m \geq N$ *berlaku* $d(x_n, x_m) \prec c$.

Definisi barisan konvergen dan barisan Cauchy di atas ekuivalen dengan definisi yang diberikan dalam Long-Guang dan Xian (2007). Diperhatikan bahwa, jika barisan $\{x_n\} \subseteq X$ konvergen maka limitnya tunggal. Sama halnya dengan ruang metrik, setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy, tetapi tidak sebaliknya. Jika setiap barisan Cauchy merupakan barisan konvergen maka ruang metrik *cone* (X,d) dikatakan lengkap (Long-Guang & Xian, 2007).

4. Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik *Cone*

Di dalam Long-Guang dan Xian (2007), pemetaan $T: X \rightarrow X$ dikatakan kontraksi di ruang metrik *cone* (X,d) jika terdapat $L \in [0,1)$ sehingga untuk setiap $x,y \in X$ berlaku

$$d\big(T(x), T(y)\big) \preccurlyeq L\, d(x,y).$$

Teorema 4.1. (Long-Guang & Xian, 2007) *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X,d) terhadap cone normal P. Jika pemetaan* $T: X \rightarrow X$ *memenuhi kondisi kontraktif, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X. Lebih lanjut, jika titik tetap tersebut adalah* $u \in X$ *maka untuk setiap* $x \in X$ *berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$$

Teorema 4.2. (Long-Guang & Xian, 2007) *Diketahui (X,d) merupakan ruang metrik cone lengkap terhadap cone normal P. Jika pemetaan* $T: X \rightarrow X$ *memenuhi kondisi*

$$d\big(T(x), T(y)\big) \preccurlyeq k(d(T(x), x) + d(T(y), y)),$$

untuk setiap $x,y \in X$, *dengan* $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *suatu konstanta, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X. Lebih lanjut, untuk setiap* $x \in X$, *barisan* $\{T^n(x)\}$ *konvergen ke titik tetap tersebut.*

Dari teorema di atas, Rezapour dan Hamlbarani menemukan bahwa syarat kenormalan *cone P* dapat diabaikan, sehingga diperoleh teorema-teorema berikut.

Teorema 4.3. (Rezapour & Hamlbarani, 2008) *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X,d). Jika pemetaan* $T: X \rightarrow X$ *memenuhi kondisi kontraktif, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X. Lebih lanjut, jika titik tetap tersebut adalah* $u \in X$ *maka untuk setiap* $x \in X$ *berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = u$$

Teorema 4.4. (Rezapour & Hamlbarani, 2008) *Diketahui (X,d) merupakan ruang metrik cone lengkap. Jika pemetaan* $T: X \to X$ *memenuhi kondisi*

$$d\big(T(x), T(y)\big) \preccurlyeq k\big(d(T(x), x) + d(T(y), y)\big),$$

untuk setiap $x, y \in X$, *dengan* $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *suatu konstanta, maka T mempunyai titik tetap tunggal di X. Lebih lanjut, untuk setiap* $x \in X$, *barisan* $\{T^n(x)\}$ *konvergen ke titik tetap tersebut.*

Selanjutnya, Aage dan Salunke (2009), memberikan teorema titik tetap bersama sebagai berikut.

Teorema 4.5. (Aage & Salunke, 2009) *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X,d) terhadap cone normal P. jika pemetaan* $T, S: X \to X$ *memenuhi*

$$\alpha d\big(T(x), S(y)\big) + \beta d\big(x, T(x)\big) + \gamma d\big(y, S(y)\big) \preccurlyeq \delta d(x, y),$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dan untuk suatu konstanta* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, *dengan* $\beta < \delta$, $\gamma < \delta$, *dan* $\delta < \alpha$, *maka T dan S mempunyai titik tetap bersama yang tunggal di dalam X.*

Diperhatikan bahwa, jika $T = S$ dan $\beta = \gamma = 0$ maka diperoleh Teorema 4.1. Namun, Teorema 4.5 belum mampu menunjukkan berlakunya Teorema 4.3, karena masih mensyaratkan *cone* yang bersangkutan harus normal. Pada dasarnya, seperti yang sudah dilakukan Rezapour dan Hamlbarani terhadap teorema dalam Long-Huang dan Xian (2007), syarat kenormalan *cone* pada Teorema 4.5 dapat diabaikan.

Diperhatikan pula, nilai konstanta α dan δ pada teorema di atas tidak mungkin nol, sebab jika nilai tersebut nol maka tidak ada β dan γ yang memenuhi. Permasalahan lainnya, disini sulit ditemukan dua pemetaan berbeda yang memenuhi Teorema 4.5. Misalkan pemetaan T dan S memenuhi teorema tersebut, maka untuk $y = x$ diperoleh

$$\alpha d\big(T(x), S(x)\big) + \beta d\big(x, T(x)\big) + \gamma d\big(x, S(x)\big) \preccurlyeq \delta d(x, x).$$

Ini berarti

$$\alpha d\big(T(x), S(x)\big) + \beta d\big(x, T(x)\big) + \gamma d\big(x, S(x)\big) \preccurlyeq 0.$$

Agar terpenuhi, maka haruslah

$$\alpha d\big(T(x), S(x)\big) = 0.$$

Karena $0 < \alpha$ maka $T(x) = S(x)$. Dengan demikian, untuk sebarang $x \in X$ berlaku $T(x) = S(x)$.

Berdasarkan permasalahan di atas, perlu kiranya memperumum konstanta α, β, γ, dan δ, yaitu β dan γ boleh negatif. Dengan demikian, diperoleh teorema berikut.

Teorema 4.6. *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X,d). Jika pemetaan* $T, S: X \to X$ *memenuhi*

$$\alpha d\big(T(x), S(y)\big) + \beta d\big(x, T(x)\big) + \gamma d\big(y, S(y)\big) \preccurlyeq \delta d(x, y), \qquad (*)$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dan untuk suatu konstanta* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, *dengan* $\alpha, \delta \geq 0$, *dan* $\beta, \gamma \leq \delta$, *serta* $\delta < \alpha + \beta + \gamma$, *maka T dan S mempunyai titik tetap bersama di dalam X. Lebih lanjut, jika* $\delta < \alpha$, *maka titik tetap bersama tersebut tunggal.*

Bukti. Diambil sebarang titik $x_0 \in X$, maka dapat dibentuk barisan $\{x_m\}$ dengan $x_{2n-1} = T(x_{2n-2})$ dan $x_{2n} = S(x_{2n-1})$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan mengambil $x = x_{2n}$ dan $y = x_{2n+1}$ pada (*) diperoleh

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \preccurlyeq \eta d(x_{2n}, x_{2n+1}),$$

dengan $\eta = \frac{\delta - \beta}{\alpha + \gamma}$. Dengan mengambil $x = x_{2n}$ dan $y = x_{2n-1}$ pada (*) diperoleh

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \preccurlyeq \theta d(x_{2n}, x_{2n-1}),$$

dengan $\theta = \frac{\delta - \gamma}{\alpha + \beta}$. Akibatnya, untuk setiap n diperoleh

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \preccurlyeq \eta^n \theta^n d(x_1, x_2),$$

dan

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \preccurlyeq \eta^n \theta^n d(x_0, x_1).$$

Untuk $m > n$, diperoleh

$$\begin{aligned} &d(x_{2n}, x_{2m}) \\ &\preccurlyeq d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + \cdots \\ &\quad + d(x_{2m-1}, x_{2m}) \\ &\preccurlyeq \frac{(\eta\theta)^n}{1 - \eta\theta}\big(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)\big). \end{aligned}$$

Karena $\delta < \alpha + \beta + \gamma$ dan $\beta, \gamma \leq \delta$ maka $0 \leq \eta < 1$ dan $0 \leq \theta < 1$. Akibatnya, $0 \leq \eta\theta < 1$, sehingga $\frac{(\eta\theta)^n}{1 - \eta\theta} \to 0$. Diambil sebarang $c \in \mathrm{int}P$. Karena $\frac{(\eta\theta)^n}{1 - \eta\theta} \to 0$, maka terdapat bilangan asli N, sehingga untuk setiap $n \leq N$ berlaku

$$-c \prec \frac{(\eta\theta)^n}{1 - \eta\theta}\big(d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2)\big) \prec c.$$

Akibatnya, $d(x_{2n}, x_{2m}) \prec c$. Dengan cara yang analog, dapat ditunjukkan bahwa $d(x_{2n}, x_{2m+1}) \prec c$, $d(x_{2n+1}, x_{2m+1}) \prec c$, dan $d(x_{2n+1}, x_{2m}) \prec c$. Ini berarti, untuk setiap $c \in \mathrm{int}P$, terdapat bilangan asli $M = 2N$, sehingga untuk setiap $k, l \geq M$ berlaku

$d(x_k, x_l) \prec c$. Dengan kata lain, $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Karena (X, d) merupakan ruang metrik cone lengkap, maka terdapat $u \in X$ sehingga $x_n \to u$. Akibatnya, diperoleh pula $x_{2n+1} \to u$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\alpha d\big(u, S(u)\big)\\
&\preccurlyeq \alpha d(u, x_{2n+1}) + \alpha d\big(x_{2n+1}, S(u)\big)\\
&= \alpha d(u, x_{2n+1}) + \alpha d\big(T(x_{2n}), S(u)\big)\\
&\preccurlyeq \alpha d(u, x_{2n+1}) + \delta d(x_{2n}, u)\\
&\qquad -\beta d\big(x_{2n}, T(x_{2n})\big) - \gamma d\big(u, S(u)\big).
\end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}
(\alpha+\gamma) d\big(u, S(u)\big) &\preccurlyeq (\alpha+\delta) d(u, x_{2n+1})\\
&\quad + (\delta-\beta) d(x_{2n}, x_{2n+1}).
\end{aligned}$$

Karena $0 \le \delta - \beta < \alpha + \gamma$ maka

$$\begin{aligned}
d\big(u, S(u)\big) &\preccurlyeq \tfrac{\alpha+\delta}{\alpha+\gamma} d(u, x_{2n+1})\\
&\quad + \tfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma} d(x_{2n}, x_{2n+1}).
\end{aligned}$$

Diambil sebarang $e \in \operatorname{int} P$. Karena $x_{2n+1} \to u$, maka terdapat bilangan asli N_1, sehingga untuk setiap $n \ge N_1$ berlaku

$$d(u, x_{2n+1}) \prec \frac{\alpha+\gamma}{2(\alpha+\delta)} e.$$

Karena $\{x_n\}$ barisan Cauchy, maka terdapat bilangan asli N_2, sehingga untuk setiap $n, m \ge N_2$ berlaku

$$d(x_n, x_m) \prec \frac{\alpha+\gamma}{1+2(\delta-\beta)} e.$$

Akibatnya, untuk $n \ge \max\{N_1, N_2\}$, diperoleh $d\big(u, S(u)\big) \prec e$. Artinya, $d\big(u, S(u)\big) = 0$, yaitu $u = S(u)$. Dengan mengambil $x = u$ dan $y = u$ pada (*), diperoleh $(\alpha+\beta) d\big(u, T(u)\big) \preccurlyeq 0$. Karena $0 < \alpha + \beta$ maka haruslah $d\big(u, T(u)\big) = 0$, yaitu $u = T(u)$. Jadi, u adalah titik tetap bersama pemetaan T dan S.

Misalkan $v \in X$ adalah titik tetap bersama yang lain. Dengan mengambil $x = u$ dan $y = v$ pada (*), diperoleh $\alpha d(u, v) \preccurlyeq \delta d(u, v)$. Karena $\delta < \alpha$, maka $d(u, v) = 0$, yaitu $u = v$. Jadi, titik tetap bersama tersebut tunggal. ■

Akibat 4.7. *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X, d). Jika untuk suatu bilangan bulat positif p dan q pemetaan $T: X \to X$ memenuhi*

$$\begin{aligned}
&\alpha d\big(T^p(x), T^q(y)\big) + \beta d\big(x, T^p(x)\big) +\\
&\qquad \gamma d\big(y, T^q(y)\big) \preccurlyeq \delta d(x, y), \qquad (**)
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan untuk suatu konstanta $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, dengan $\alpha, \delta \ge 0$, dan $\beta, \gamma \le \delta$, serta $\delta < \alpha + \beta + \gamma$ dan $\delta < \alpha$, maka T memiliki titik tetap tunggal di X.

Bukti. Dengan mengambil $T = T^p$ dan $S = T^q$ pada Teorema 4.6 diperoleh bentuk (**). Berdasarkan Teorema 4.6 diperoleh bahwa T^p dan T^q mempunyai titik tetap bersama yang tunggal, katakana $u \in X$. Diperhatikan bahwa $T^p\big(T(u)\big) = T\big(T^p(u)\big) = T(u)$ dan $T^q\big(T(u)\big) = T\big(T^q(u)\big) = T(u)$. Ini berarti $T(u)$ juga titik tetap bersama dari T^p dan T^q. Karena titik tetap bersama tersebut tunggal, maka haruslah $u = T(u)$. Jadi, u adalah titik tetap T. Misalkan v adalah titik tetap yang lain. Maka dapat ditunjukkan v juga titik tetap bersama pemetaan T^p dan T^q. Dengan demikian, $u = v$. Jadi, T memiliki titik tetap tunggal di X. ■

Akibat 4.8. *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X, d). Jika untuk suatu bilangan bulat positif n pemetaan $T: X \to X$ memenuhi*

$$d\big(T^n(x), T^n(y)\big) \preccurlyeq k d(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan untuk suatu konstanta $k \in [0,1)$, maka T memiliki titik tetap tunggal di X.

Bukti. Akibat 4.8 merupakan kejadian khusus dari Akibat 4.7, yaitu dengan mengambil $= q = n$, $\beta = \gamma = 0$, dan konstanta $k = \frac{\delta}{\alpha}$. ■

Diperhatikan bahwa, jika diambil $n = 1$ pada Akibat 4.8 maka diperoleh teorema yang diberikan oleh Rezapour dan Hamlbarani (Teorema 4.3), yang sekaligus merupakan bentuk umum dari Teorema 4.1.

Dari Akibat 4.7 juga dapat dilihat bahwa Teorema 4.4 merupakan salah satu kejadian khususnya. Jika pada Akibat 4.7 diambil $p = q = 1$, $\delta = 0$, dan $\beta = \gamma$ maka diperoleh bentuk

$$\begin{aligned}
&\alpha d\big(T(x), T(y)\big) + \beta d\big(x, T(x)\big)\\
&\qquad + \beta d\big(y, T(y)\big) \preccurlyeq 0.
\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa $\beta \le 0$ dan $0 < \alpha + 2\beta$. Sehingga diperoleh $0 \le -\frac{\beta}{\alpha} < \frac{1}{2}$. Dengan mengambil $k = -\frac{\beta}{\alpha}$ maka diperoleh kondisi pada Teorema 4.4, yaitu

$$\begin{aligned}
d\big(T(x), T(y)\big) \preccurlyeq\ & k(d(T(x), x)\\
&+ d(T(y), y)),
\end{aligned}$$

dengan $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Teorema 4.4 ini sekaligus merupakan perumuman dari Teorema 4.2.

Contoh 4.9. Diberikan ruang metrik *cone* (X, d) dengan $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ dan

$$d(x, y) = (|x-y|, 2|x-y|), \forall x, y \in X.$$

Dapat ditunjukkan bahwa pemetaan T dan S dengan $T(x) = \frac{1}{2}x$ dan $S(x) = \frac{1}{4}x$ memenuhi Teorema 4.6, yaitu dengan mengambil konstanta $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{3}$, dan $\delta = \frac{1}{2}$.

5. Simpulan

Teorema 4.6 merupakan teorema yang diperoleh dengan memperumum Teorema 4.5 yang diberikan oleh Aage dan Salunke (2009). Teorema tersebut sekaligus dapat menjamin berlakunya teorema-teorema titik tetap untuk suatu pemetaan T pada ruang metrik *cone* seperti yang diberikan pada Teorema 4.1 sampai Teorema 4.4. Dengan demikian, dapat dikatakan pula bahwa Teorema 4.6 merupakan bentuk umum dari Teorema 4.1 sampai Teorema 4.5.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat diteliti sifat-sifat atau akibat lain dari Teorema 4.6. Penelitian dapat pula diarahkan pada perluasan ruang metrik *cone*, misalnya menjadi ruang metrik *cone* parsial.

6. Daftar Pustaka

Aage, C. T., & Salunke, J. N. (2009). On Common Fixed Points for Contractive Type Mappings in Cone Metric Spaces. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 1*, 10-15.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Long-Guang, H., & Xian, Z. (2007). Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332*, 1468-1476.

Rezapour, S., & Hamlbarani, R. (2008). Some Note on the Paper "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings". *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 345*, 719-724.