MODEL MULTIPLE DECREMENT DAN APLIKASINYA

I Gusti Nyoman Yudi Hartawan

Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, UNDIKSHA
hartawan.math@gmail.com

Abstrak: Cepatnya perkembangan asuransi ditandai dengan bermunculannya inovasi-inovasi produk yang ditawarkan. Model multiple decrement merupakan salah satu model aktuaria yang digunakan sebagai acuan dalam merancang suatu produk asuransi. Dalam model ini klaim tidak hanya terjadi karena orang tersebut meninggal tetapi klaim juga terjadi karena cacat atau sebab (*decrement*) lainya sehingga penentuan premi dengan menggunakan model ini tentunya akan berbeda dari produk asuransi pada umumnya. Makalah ini membahas mengenai model multiple decrement , bagaimana membentuk tabel multiple decrement dan aplikasi dari model tersebut dalam hal menentukan premi dari suatu produk asuransi yang bersesuaian

Kata-kata kunci: ***model multiple decrement, premi***

PENDAHULUAN

Asuransi muncul sebagai akibat dari adanya ketidakpastian akan kejadian dimasa yang akan datang, kita tidak tahu kapan kita meninggal, kapan kita sakit dan lainya. Perusahaan asuransi menyiapkan uang pertangungan bagi resiko yang yang dihadapi nasabahnya yang dikenal sebagai manfaat dan tertanggung (pemegang polis) melakukan kewajibanya dalam bentuk membayar premi. Dengan pesatnya pertumbuhan asuransi memunculkan inovasi-inovasi produk asuransi yang diwarkan ke konsumen.

Asuransi jiwa adalah salah satu produk asuransi yang umum dikenal, dalam asuransi ini menanggung resiko kematian akan satu orang tertanggung (*single life*). Asuransi tersebut memiliki satu decrement (*single decrement*) yaitu kematian, dengan sedikit modifikasi model prosuk asuransi tersebut dapat dirubah menjadi model dengan 2 decrement (dengan memasukan sakit sebagai decrement lainnya).

Penambahan decrement menyebabkan perubahan dalam penentuan premi karena benefit (manfaat) yang diterima tertanggung (pemegang polis) juga berbeda. Secara teori perbedaan antara model single decrement dengan model multiple decrement terletak pada jumlah variable random yang dilibatkan dalam proses penentuan preminya. Jika pada model single decrement hanya melibatkan satu variabel random yaitu sisa usia ($T(X)$) sedangkan pada model multi decrement selain variabel tersebut juga melibatkan variabel random diskret yang menyatakan penyebab decrement yang dinotasikan dengan $J(X)$.

Artikel ini akan membahas mengenai model multi decrement kemudian dilanjutkan dengan membentuk tabel multiple decrement dan aplikasinya dalam menentukan premi suatu produk asuransi.

DASAR TEORI

Distribusi Gabungan

Fungsi densitas probabilitas gabungan (joint pdf) dari variabel random diskrit berdimensi k , $X = (X_1, X_2, ...X_k)$ *didefinisikan sebagai:*

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k]$$

Fungsi distribusi kumulatif gabungannya adalah

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = P[X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k]$$

Untuk semua nilai $x = \left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ *dari* X

(Bain dan Engelhardt. 1992).

Definisi 2.7 *Variabel random berdimensi k* $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ *dikatakan kontinu jika terdapat suatu fungsi* $f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$ *dari* X *sehingga fungsi distribusi komulatif (CDF) gabungannya dapat dituliskan sebagai :*

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = \int_{-\infty}^{x_k} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f\left(t_1, \ldots, t_k\right) dt_1 \ldots dt_k$$

untuk semua $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$

Fungsi densitas probabilitas gabungannya diperoleh dengan menurunkan CDF terhadap $x_1, x_2, ..., x_k$ (Bain dan Engelhardt. 1992)

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} F\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$$

Distribusi Bersyarat (*Conditional Distribution*)

Definisi 2.1 *Jika* X_1 *dan* X_2 *adalah variabel random diskrit atau kontinu dengan fungsi distribusi gabungan* $f(x_1, x_2)$*, maka fungsi distribusi probabilitas bersyarat (conditional pdf) dari* X_2 *jika diketahui* $X_1 = x_1$ *didefinisikan sebagai berikut :*

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \qquad (2.10)$$

Untuk nilai x_1 *yang memenuhi* $f(x_1) > 0$*, dan 0 untuk yang lain.*

(Bain dan Engelhardt. 1992).

Model Survival

Model survival merupakan suatu distribusi probabilitas untuk suatu jenis variabel random tertentu (London ,1997). Analisis survival adalah metode statistika yang digunakan untuk menganalisis data yang berhubungan dengan waktu hingga suatu kejadian terjadi . Kejadian yang diamati dapat berupa kejadian kematian, munculnya suatu penyakit, kambuh dari suatu penyakit dan lainnya. Dengan kata lain, analisis survival memerlukan data yang merupakan waktu survival dari suatu individu. Waktu yang diperoleh merupakan suatu random variabel dan tentunya memiliki suatu distribusi probabilitas. Misalkan T merupakan variabel random dari waktu survival, fungsi survival $S(t)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$S(t) = P(T > t)$$

fungsi survival $S(t)$ memiliki sifat $S(0) = 1$ dan $S(\infty) = 0$.

Fungsi distribusi kumulatif (*CDF*) dari T ($F(t)$) didefinisikan sebagai berikut:

$$F(t) = P(T < t)$$

sehingga diperoleh

$$F(t) = 1 - S(t)$$

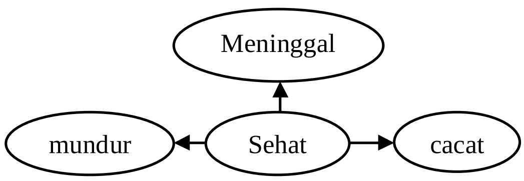
yang berakibat $F(0) = 0$ dan $F(\infty) = 1$ dalam kasus variabel random kontinu fungsi densitas probabilitas (pdf) ($f(t)$) didefinisikan sebagai berikut:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = -\frac{d}{dt} S(t)$$

PEMBAHASAN

Model Multiple Decrement

Model multiple decrement merupakan salah satu model aktuaria yang dapat digunakan dalam merancang suatu produk asuransi. Model multiple decrement bermakna terdapat lebih dari satu decrement (gambar 1). Pada model single decrement menggunakan satu variabel random yaitu variabel kontinu sisa usia, $T(X)$, sedangkan pada model multiple decrement terdapat variabel random lain selain $T(X)$ yang dinotasikan dengan $J(X)$ yaitu variabel random diskret penyebab decrement. Berikut salah satu model multiple decrement dengan 3 decrement.



Gambar 1. Salah Satu Model Multiple Decrement dengan 3 Decrement

Fungsi distribusi probabilitas bersama (*joint pdf*) dari variabel random $T(X)$ dan $J(X)$ dinotasikan dengan $f_{T,J}(t,j)$. Fungsi tersebut digunakan untuk menghitung probabilitas kejadian yang didefiniskan oleh *T* dan J.
Contoh:

$$\int_0^t f_{T,J}(s,j)ds = \Pr\left\{\left(0 < T \le t\right) \cap \left(J = j\right)\right\}$$

Merupakan probabilitas decrement karena sebab *j* sebelum *t* yang dinotasikan dengan ${}_t q_x^{(j)}$ dengan $t \ge 0,\ j = 1, 2, ..., m$.
Melalui joint pdf dapat ditentukan distribusi marginal untuk *j* yaitu

$$f_J(j) = \int_0^\infty f_{T,J}(s,j)ds = {}_\infty q_x^{(j)} \quad j = 1, 2, ..., m$$

dan

$$f_T(t) = \sum_{j=1}^m f_{T,J}(t,j)$$

$$F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$$

Notasi aktuaria untuk bentuk di atas adalah sebagai berikut:

$${}_t q_x^{(\tau)} = \Pr\left\{T \le t\right\} = F_T(t) = \int_0^t f_T(s)ds$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = \Pr\left\{T > t\right\} = 1 - {}_t q_x^{(\tau)}$$

Force of decrement untuk semua sebab yaitu,

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}$$

$$= \frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_t q_x^{(\tau)}$$

$$= -\frac{1}{{}_t p_x^{(\tau)}} \frac{d}{dt} {}_t p_x^{(\tau)}$$

$$= -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x^{(\tau)}$$

$${}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds}$$

Sedangkan force of decrement karena sebab *j* adalah sebagai berikut:

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{f_{T,J}(t,j)}{1 - F_T(t)}$$

$$= \frac{f_{T,J}(t,j)}{{}_t p_x^{(\tau)}}$$

Kemudian diperoleh,

$$f_{T,J}(t,j)dt = {}_t p_x^{(\tau)}(t) \mu_x^{(j)}(t)dt \quad j = 1, 2, ..., m, t \ge 0$$

$$\mu_x^{(j)}(t) = \frac{1}{{}_t p_x^{(j)}} \frac{d}{dt} {}_t q_x^{(j)}$$

Dan

$${}_t q_x^{(\tau)} = \int_0^t f_T(s)ds = \int_0^t \sum_{j=1}^m f_{T,J}(s,j)ds$$

$$= \sum_{j-1}^m \int_0^t f_{T,J}(s,j)ds = \sum_{j-1}^m {}_t q_x^{(j)}$$

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \sum_{j=1}^m \mu_x^{(j)}(t)$$

Bentuk terakhir bermakna total force of decrement merupakan total dari force of decrement dari masing-masing sebab.

.

Model Associated Single Decrement

Dalam model multi decrement dimungkinkan untuk membentuk suatu model single decement yang hanya dipengaruhi oleh satu decrement saja, model ini didefinisikan sebagai model associated single decrement, fungsinya sebagai berikut:

$${}_t p_x^{'(j)} = e^{\left(-\int_0^t \mu_x^{(j)}(s)ds\right)}$$

$${}_t q_x^{'(j)} = 1 - {}_t p_x^{'(j)}$$

Bentuk terakhir disebut sebagai *absolute rate of decrement* yang diintepretasikan sebagai probabilitas bersih decrement karena sebab *j* tanpa dipengaruhi penyebab lainnya. Selanjutnya akan ditunjukkan hubungan antara ${}_t p_x^{(\tau)}$ dengan ${}_t p_x^{'(j)}$.

$$\mu_x^{(\tau)}(s) = \mu_x^{(1)}(s) + \mu_x^{(2)}(s) + ... + \mu_x^{(m)}(s)$$

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x^{(\tau)} &= e^{-\int_0^t \left(\mu_x^{(1)}(s)+\mu_x^{(2)}(s)+\ldots+\mu_x^{(m)}(s)\right)ds} \\
&= e^{-\int_0^t \left(\mu_x^{(1)}(s)\right)ds}\, e^{-\int_0^t \left(\mu_x^{(2)}(s)\right)ds} \ldots e^{-\int_0^t \left(\mu_x^{(m)}(s)\right)ds} \\
&= \prod_{j=1}^{m} {}_t p_x^{'(j)}
\end{aligned}
$$

Sehingga dengan mudah dipahami bahwa ${}_t p_x^{'(j)} \geq {}_t p_x^{(\tau)}$, ini berakibat

$$
{}_t p_x^{'(j)} \mu_x^{(j)}(t) \geq {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)
$$

$$
\int_0^1 {}_t p_x^{'(j)} \mu_x^{(j)}(t)dt \geq \int_0^1 {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t)dt
$$

$$
q_x^{'(j)} \geq q_x^{(j)}
$$

Pembentukan Tabel Multiple Decrement

Dalam penentuan premi asuransi jiwa digunakan tabel mortalita sebagai acuan dalam proses perhitungannya. Tabel mortalita memberikan informasi mengenai probabilitas seseorang yang berusia tertentu akan meninggal setahun kemudian. Asuransi yang melibatkan lebih dari satu decrement juga memerlukan tabel seprti hanlnya tabel mortalita dalam proses penentuan preminya. Pembentukan tabel mortalita cukup sederhana karena cukup hanya dengan membagi jumlah kematian yang terjadi selama setahun dengan jumlah orang yang hidup di awal tahun. Tabel ini tidak dapat digunakan sebagai acuan untuk kasus asuransi jenis lainnya. Tetapi, jika dimiliki beberapa tabel single decrement maka kita dapat membentuk tabel multiple decrementnya memanfaatkan hubungan seperti yang dibahas pada sub bab 3.2. Berikut akan diuraikan langkah-langkahnya.

1. tentukan ${}_t p_x^{(\tau)}$ dengan memanfaatkan hubungan ${}_t p_x^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{m} {}_t p_x^{'(j)}$
2. dari 1 diperoleh ${}_t q_x^{(\tau)} = 1 - {}_t p_x^{(\tau)}$
3. dengan menggunakan asumsi percepatan konstan diperoleh ${}_s q_x^{(j)} = \dfrac{\ln {}_t p_x^{'(j)}}{\ln {}_t p_x^{(\tau)}}\, {}_s q_x^{(\tau)}$

contoh:
diberikan tabel untuk associated single decrement sebagai berikut:

Umur (x)	$q_x^{'(1)}$	$q_x^{'(2)}$	$q_x^{'(3)}$
50	0.021	0.029	0.2
51	0.023	0.036	0.18
52	0.027	0.042	0.1

Untuk membentuk tabel multiple decrementnya pertama dicari terlebih dahulu $p_x^{'(j)}$,

$p_x^{'(1)} = 1 - q_x^{'(1)} = 1 - 0.021 = 0.979$

Dengan cara yang sama diperoleh sebagai berikut:

Umur (x)	$p_x^{'(1)}$	$p_x^{'(2)}$	$p_x^{'(3)}$
50	0.979	0.971	0.8
51	0.977	0.964	0.82
52	0.973	0.958	0.9

Kemudian dicari $p_x^{(\tau)}$

$$
p_{50}^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{3} p_{50}^{'(j)} = 0.021 \times 0.029 \times 0.2 = 0.000122
$$

$$
p_{51}^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{3} p_{51}^{'(j)} = 0.023 \times 0.036 \times 0.18 = 0.000149
$$

$$
p_{52}^{(\tau)} = \prod_{j=1}^{3} p_{52}^{'(j)} = 0.027 \times 0.042 \times 0.1 = 0.000113
$$

Sehingga diperoleh

$$
q_{50}^{(\tau)} = 1 - p_{50}^{(\tau)} = 1 - 0.000122 = 0.999878
$$

$$
q_{51}^{(\tau)} = 1 - p_{51}^{(\tau)} = 1 - 0.000149 = 0.999851
$$

$$
q_{52}^{(\tau)} = 1 - p_{52}^{(\tau)} = 1 - 0.000113 = 0.999887
$$

Selanjutnya,

$$q_{50}^{(1)} = \frac{\ln p_{50}^{'(1)}}{\ln p_{50}^{(\tau)}} q_{50}^{(\tau)} = \frac{\ln 0.979}{\ln 0.000122} 0.999878 = 0.002354$$

$$q_{51}^{(1)} = \frac{\ln p_{51}^{'(1)}}{\ln p_{51}^{(\tau)}} q_{51}^{(\tau)} = \frac{\ln 0.977}{\ln 0.000149} 0.999851 = 0.00264$$

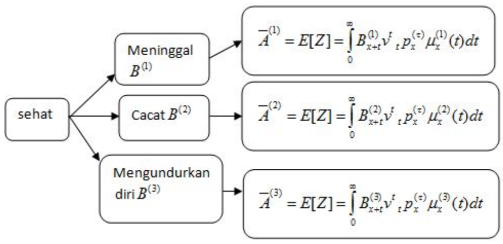
dengan cara yang sama diperoleh tabel multiple decrement sebagai berikut:

Umur (x)	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
50	0.002354	0.003265	0.024755
51	0.00264	0.00416	0.022519
52	0.003013	0.004723	0.011596

Aplikasi dalam Penentuan Premi

Model multi decrement dapat diaplikasikan dalam membuat suatu produk asuransi, model ini biasanya digunakan dalam produk pensiun dima decrement yang digunakan adalah, meninggal, mengundurkan diri dan cacat. Berikut akan diberikan bagaimana menentukan besar preminya:

Didefinisikan $B_{x+t}^{(j)}$ merupakan besar manfaat saat usia $x+t$ untuk decrement *j*, kemudian nilai sekarang aktuaria dari manfaat yang dinotasikan dengan $\overline{A}$ diberikan dengan rumus berikut:



Gambar 2

Dari gambar di atas dapat disederhanakan menjadi berikut:

$$\overline{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt$$

$\overline{A}$ juga disebut sebagai premi tunggal bersih atau premi sekali bayar.

Contoh:

Misalkan suatu produk asuransi dengan decrement sesuai dengan gambar 2. Diberikan manfaat kematian sebesar Rp.100.000.000, manfaat karena cacat Rp.50.000.000 dan manfaat karena mengundurkan diri sebesar Rp. 10.000.000. diketahui:

$$\mu_x^{(1)}(t) = 0.002$$

$$\mu_x^{(2)}(t) = 0.015$$

$$\mu_x^{(3)}(t) = 0.01$$

Jika sesorang membeli produk asuransi tersebut pada saat berumur 30 tahun dan suku bunga yang digunakan adalah 6% maka premi sekali bayar adalah sebagai berikut:

$$i = 6\% \rightarrow v = \frac{1}{1+i} = 0.943396$$

$$\mu_x^{(\tau)}(t) = \mu_x^{(1)}(t) + \mu_x^{(2)}(t) + \mu_x^{(3)}(t) = 0.0252$$

$$ {}_t p_x^{(\tau)} = e^{-\int_0^t \left(\mu_x^{(\tau)}(s)\right) ds} = e^{-\int_0^t 0.0252 ds} = e^{-0.0252t}$$

$$\overline{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\infty B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt$$

$$\overline{A} = 10\, juta \int_0^\infty 0.943396^t \times 0.0252t \times 0.002 dt + 5\, juta \int_0^\infty 0.943396^t \times 0.0252t \times 0.015 dt + 1\, juta \int_0^\infty 0.943396^t \times 0.0252t \times 0.01 dt$$

$$= 7793140$$

Sehingga untuk mendapatkan manfaat itu dia harus membayar sebesar Rp.7.793.140

SIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model multiple decrement merupakan model aktuaria dalam asuransi yang terdiri dari lebih satu decrement.

2. Tabel multiple decrement dapat dibuat melalui tabel associated single decrement
3. Melalui Model multiple decrement dapat ditentukan besar premi asuransi yang memiliki lebih dari satu decrement dengan rumus

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{\infty} B_{x+t}^{(j)} v^t \, {}_t p_x^{(\tau)} \mu_x^{(j)}(t) dt$$

DAFTAR RUJUKAN

Bain, Lee J dan Engelhardt, Max. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics. California :* Duxbury.

.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. dan Nesbitt, C.J., 1997, *Actuarial Mathematics 2nd Edition*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Dickson, D.C.M., Hardy, M.R., and Waters, H.R. 2009. *Actuarial Mathematics For Life Contingent Risk.* Cambridge University Press, New York

London, Dick, 1997, *Survival Models and Their Estimation 3rd Edition*, Actex Publication, Winsted

Kellison, Stephen. G. 2009. *The Theory of Interest 3rd Edition* . McGraw Hill, New York.