

Pendekatan Model Markov Dalam Penentuan Premi Tunggal Bersih Asuransi Jiwa *Multi-Life*

I Gusti Nyoman Yudi Hartawan

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Undiksha, Singaraja
hartawan.math@gmail.com

Abstrak

Pada makalah ini, digunakan model markov dalam memodelkan ketidakbebasan antara sisa usia hidup suami dan istri. Dalam model markov transisi antar state mempertimbangkan state sekarang pasangan tersebut berada. Estimasi intensitas transisi pada model markov menggunakan metode maksimum likelihood. Hasil estimasi tersebut kemudian digunakan dalam menghitung premi tunggal bersih pada asuransi jiwa multi life dengan status *last survivor*.

Kata-kata kunci: model markov, intensitas transisi, metode maksimum likelihood, premi tunggal bersih, status last survivor

1. Pendahuluan

Asuransi jiwa merupakan salah satu jenis asuransi yang umum ada di masyarakat. Asuransi ini menanggung resiko kematian yang dialami nasabahnya. Jika terjadi kematian maka penanggung akan memberikan santunan (manfaat kematian) dalam jumlah tertentu kepada ahli waris dari nasabah tersebut

Asuransi jiwa *multi life* merupakan salah satu jenis asuransi jiwa dimana yang ditanggung adalah resiko kematian untuk sekelompok orang, dalam makalah ini sekelompok orang itu adalah pasangan suami istri. Terdapat dua status pada asuransi ini, yaitu status *joint life* dan *last survivor*. Perhitungan konvensional sering mengasumsikan status dari suami dan istri independen padahal studi empirik menunjukkan adanya korelasi antara status suami dan istri. Seperti yang ditunjukkan oleh Jagger dan Sutton (1991) yaitu adanya peningkatan resiko relatif kematian setelah kematian pasangannya. Untuk itu pada makalah ini ketidakbebasan tersebut akan dimodelkan dengan model markov dimana pada model ini transisi antar states ditentukan oleh intensitas matrik transisi tersebut.

2. Dasar Teori

2.1 Proses Stokastik

Definisi 2.1 Proses Stokastik $\{X_t, t \in T\}$

adalah himpunan variabel random, dengan X_t adalah variabel random dan t adalah

indeks atau parameter dalam T . Jika himpunan indeks T terhitung maka $\{X_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik waktu diskrit, dan jika himpunan indeks T merupakan suatu interval dari garis bilangan maka $\{X_t, t \in T\}$ disebut proses stokastik waktu kontinu

2.2 Rantai Markov

Definisi 2.2 Proses stokastik $\{X_t, t \in T\}$ dikatakan rantai markov jika

$$P\{X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{ij}$$

Untuk semua state i_0, i_1, i_{n-1}, i, j

(Ross, 2010)

2.3 Matriks Probabilitas Transisi

Perhatian utama dari analisis rantai markov adalah menghitung probabilitas dari kemungkinan realisasi dari proses. Pokok dari perhitungan ini adalah matriks probabilitas transisi langkah ke- n $\mathbf{P}^{(n)} = \|p^{ij(n)}\|$. Disini $p^{ij(n)}$ berarti probabilitas proses pindah dari state i ke state j dalam n transisi.

$$p^{ij(n)} = \Pr\{X_{m+n} = j | X_m = i\}$$

Teorema 1 Probabilitas transisi langkah ke- n dari rantai markov memenuhi

$$p^{ij(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{ik} p^{kj(n-k)}$$

dengan

$$p^{ij(0)} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

2.4 Persamaan Chapman Kolmogorov

Persamaan Chapman Kolmogorov menjelaskan lintasan (*path*) yang dimulai pada status i pada waktu t menuju status j pada waktu u melalui beberapa status k pada waktu w . Persamaannya sebagai berikut:

$${}_u P_t^{ij} = \sum_{k \in I} {}_w P_t^{ik} {}_u P_w^{kj}, \quad (t \leq w \leq u)$$

3. Pembahasan

3.1 Model Markov

Pada model ini terdapat 4 state yang mungkin ditempati pasangan tersebut. Pada awalnya pasangan itu berada pada state 0 kemudian jika suaminya meninggal maka istri masuk state 1, jika istri meninggal lebih dahulu maka suami masuk state 2 dan jika janda atau duda tersebut meninggal dengan jarak waktu lebih dari 5 hari maka masuk state 3. Jika jarak waktu kematian istri dan suami tidak lebih dari 5 hari maka pasangan tersebut langsung masuk state 3 (kematian tergolong *common shock*). Dinotasikan μ_{x+t} merupakan *force of mortality* dari istri yang berusia x jika diketahui suami masih hidup dan sebaliknya untuk suami. Untuk intensitas berpindah state 0 ke 3 secara langsung dinotasikan dengan μ^{03} . Berikut merupakan probabilitas bersyarat seseorang yang berumur $z+t$ tahun berada pada state j jika diketahui dia berada pada state i saat beumur z tahun

${}_t P_z^{ij} = \Pr(X_{z+t} = j | X_z = i), \quad i, j = 0, 1, 2, 3$

Dengan menggunakan persamaan forwad kolmogorov diperoleh:

$$\frac{d}{dt} {}_t P_z^{ij} = \sum_{k=0, k \neq j}^n ({}_t P_z^{ik} \mu_{z+t}^{kj} - {}_t P_z^{ij} \mu_{z+t}^{jk})$$

Persamaan differensial di atas dapat dibuat dalam bentuk matriks, yaitu

$$\frac{d}{dt} P(z, z+t) = P(z, z+t)A(z+t)$$

dengan $P(z, z+t)$ merupakan sebuah matrix yang entrinya adalah ${}_t P_z^{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$ dan $A(z+t)$ disebut matrix

intensitas dimana elemennya adalah μ_{z+t}^{ij}

untuk $i \neq j$ dan $-\sum_{j=0, j \neq i}^3 \mu_{z+t}^{ij}$ untuk $i = j$.

Dengan menyelesaikan persamaan differensial di atas diperoleh

$${}_t P_z^{00} = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{z+s}^{01} + \mu_{z+s}^{02} + \mu_{z+s}^{03}) ds\right)$$

$${}_t P_z^{11} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{z+s}^{13} ds\right)$$

$${}_t P_z^{22} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{z+s}^{23} ds\right)$$

$${}_t P_z^{01} = \int_0^t ({}_s P_z^{00} \mu_{z+s}^{01} {}_{t-s} P_{z+s}^{11}) ds$$

$${}_t P_z^{02} = \int_0^t ({}_s P_z^{00} \mu_{z+s}^{02} {}_{t-s} P_{z+s}^{22}) ds$$

$${}_t P_z^{13} = \int_0^t {}_s P_z^{11} \mu_{z+s}^{13} ds$$

$${}_t P_z^{23} = \int_0^t {}_s P_z^{22} \mu_{z+s}^{23} ds$$

3.2 Estimasi Parameter

Langkah selanjutnya dalam proses mencari fungsi dari probabilitas transisi adalah mengestimasi parameternya. Dalam makalah ini digunakan metode estimasi maksimum likelihood (MLE). Prinsip dari metode ini adalah memaksimumkan estimator parameter sehingga nilainya dekat dengan parameter. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi densitas bersama dari T_x dan T_y , dimana T_x merupakan variabel random sisa usia dari istri dan T_y merupakan variabel random sisa usia dari suami. Fungsinya sebagai berikut:

$$f_{T(x)T(y)}(u, v) = \begin{cases} {}_u P_{xy}^{00} \mu_{x+u}^{01} \mu_{y+u}^{02} P_{y+u}^{22} \mu_{y+u}^*, & \text{jika } u < v \\ {}_v P_{xy}^{00} \mu_{y+v}^{02} \mu_{x+v}^{01} P_{x+v}^{11} \mu_{x+v}^*, & \text{jika } u > v \\ {}_u P_{xy}^{00} \mu^{03} & \text{jika } u = v \end{cases}$$

Dari fungsi densitas bersama di atas dapat dicari fungsi likelihoodnya, yaitu:

$$L = \prod_{i=1}^n f_{T_{x_i} T_{y_i}}(u_i, v_i)$$

Untuk memudahkan dalam proses perhitungan maka fungsi likelihood tersebut dilogkan, sehingga diperoleh:

$$l = \ln(L) = \sum_{i=1}^n \left(-\int_0^{v_i} (\mu_{x_i+t} + \mu_{y_i+t} + \mu^{03}) dt + d_i^1 \ln(\mu_{y_i+v_i}) \right. \\ \left. + d_i^2 \ln(\mu_{x_i+v_i}) + d_i^3 \ln(\mu^{03}) \right) \\ + \sum_{j=1}^{m_1} \left(-\int_0^{u_{1,j}} \mu_{x_j+v_j+t}^* dt + h_{1,j} \ln(\mu_{x_j+v_j+u_{1,j}}^*) \right) \\ + \sum_{k=1}^{m_2} \left(-\int_0^{u_{2,k}} \mu_{y_k+v_k+t}^* dt + h_{2,k} \ln(\mu_{y_k+v_k+u_{2,k}}^*) \right)$$

Dimana

n adalah total jumlah pasangan dalam data

$m_1(m_2)$ adalah total jumlah dari duda (janda) dalam data

v_i adalah waktu sampai pasangan ke- i keluar dari state 0, $i = 1, 2, \dots, n$

$d_i^j = 1$ jika pasangan ke- i berpindah dari state 0 ke state j pada $t = v_i, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3$

$u_{1,j}(u_{2,k})$ adalah waktu sampai duda ke- j atau janda ke- k meninggalkan state 1 atau 2. $j = 1, 2, \dots, m_1, k = 1, 2, \dots, m_2$

$h_{1,j} = 1$ jika duda meninggal pada $t = u_{1,j}$,

$h_{2,k} = 1$ jika janda meninggal pada $t = u_{2,k}$

x_i dan y_i merupakan usia masuk dari istri dan suami dari pasangan ke- i .

Dengan menggunakan hukum gompertz persamaan loglikelihood tersebut menjadi

$$l_1 = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{B_1 C_1^{x_i} (C_1^{y_i} - 1)}{\ln(C_1)} + d_i^2 \ln(B_1 C_1^{x_i+v_i}) - \frac{B_2 C_2^{y_i} (C_2^{v_i} - 1)}{\ln(C_2)} \right. \\ \left. + d_i^1 \ln(B_2 C_2^{y_i+v_i}) - v_i \mu^{03} + d_i^3 \ln(\mu^{03}) \right) \\ l_2 = \sum_{j=1}^{m_1} \left(-\frac{B_3 C_3^{x_j+v_j} (C_3^{u_{1,j}} - 1)}{\ln C_3} + h_{1,j} \ln(B_3 C_3^{x_j+v_j+u_{1,j}}) \right) \\ l_3 = \sum_{k=1}^{m_2} \left(-\frac{B_4 C_4^{y_k+v_k} (C_4^{u_{2,k}} - 1)}{\ln C_4} + h_{2,k} \ln(B_4 C_4^{y_k+v_k+u_{2,k}}) \right)$$

Dimana (B_1, C_1) dan (B_2, C_2) merupakan parameter Gompertz untuk mortalitas istri dan suami pada state 0. (B_3, C_3) dan (B_4, C_4) merupakan parameter Gompertz untuk mortalitas istri dan suami pada state

1 dan 2. Langkah selanjutnya adalah memaksimumkan fungsi likelihood di atas yaitu dengan mencari turunan parsialnya yang disamakan dengan 0

untuk l_1

$$\frac{\partial}{\partial B_1} l_1 = 0, \frac{\partial}{\partial C_1} l_1 = 0, \frac{\partial}{\partial B_2} l_1 = 0, \frac{\partial}{\partial C_2} l_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \mu^{03}} l_1 = 0$$

Demikian juga untuk l_2 dan l_3 .

Dengan menyelesaikan dari persamaan di atas diperoleh estimator untuk masing-masing parameternya.

3.3 Perhitungan Premi Asuransi Jiwa Multi Life Survivorship

Pada model markov ini terdapat 3 kemungkinan kejadian yang dapat dialami masing-masing pasangan, yaitu: 1. Suami dan istri tetap hidup sampai akhir periode pengamatan, 2. Istri tetap hidup sampai akhir periode pengamatan tetapi suaminya meninggal pada suatu waktu di periode pengamatan, dan 3. Suami tetap hidup sampai akhir periode pengamatan tetapi istrinya meninggal pada suatu waktu di periode pengamatan. Berdasarkan informasi tersebut, dapat dicari premi tunggal bersihnya, yaitu:

$$\bar{A}_{\overline{xy}:n} = E[z_{T(\overline{xy})}] = \int_0^n z_t p_{T(\overline{xy})} \mu_{T(\overline{xy})}(t) dt$$

Diketahui hubungan berikut:

$$\bar{A}_{\overline{xy}:n} = 1 - \delta \bar{a}_{\overline{xy}:n}$$

Dengan,

$$\bar{a}_{\overline{xy}:n} = \int_0^n e^{-\delta t} {}_t p_{\overline{xy}} dt = \int_0^n e^{-\delta t} ({}_t p_{xy}^{01} + {}_t p_{xy}^{02} + {}_t p_{xy}^{00}) dt$$

sehingga preminya dapat dicari dengan

$$\bar{A}_{\overline{xy}:n} = 1 - \delta \int_0^n e^{-\delta t} ({}_t p_{xy}^{01} + {}_t p_{xy}^{02} + {}_t p_{xy}^{00}) dt$$

4. Studi Kasus

Hasil pada pembahasan akan diterapkan pada data anuitas *joint life* dan *last survivor* yang dapat diperoleh pada www.soa.org. Jumlah data yang digunakan adalah 11.626 pasangan. Berikut ringkasan datanya,

Tabel 1: Ringkasan Data

Umur (suami)	Jumlah	Jumlah kematian
$50 \leq umur < 60$	1067	41
$60 \leq umur < 70$	6511	469
$70 \leq umur < 80$	3832	611
$umur \geq 80$	216	77
Total	11626	1157

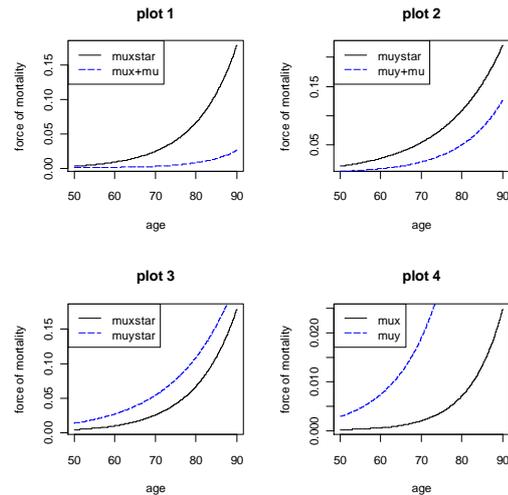
Umur (istri)	Jumlah	Jumlah kematian
$50 \leq umur < 60$	2480	29
$60 \leq umur < 70$	6646	195
$70 \leq umur < 80$	2394	185
$umur \geq 80$	106	16
Total	11626	396

Dari tabel di atas dapat dilihat jumlah kematian suami lebih banyak daripada istri yaitu hampir 3 kali lipat. Selanjutnya dilakukan estimasi pada model markov, berikut hasilnya

Tabel 2: hasil estimasi parameter model markov

Parameter	Estimasi	Std.error
B_1	3.15318×10^{-7}	3.738949×10^{-17}
C_1	1.1335	1.130924×10^{-25}
B_2	2.615021×10^{-5}	5.476976×10^{-19}
C_2	1.0987	1.667579×10^{-24}
B_3	2.635487×10^{-5}	2.260205×10^{-21}
C_3	1.103	7.075633×10^{-27}
B_4	3.888998×10^{-4}	3.057896×10^{-24}
C_4	1.073	2.384042×10^{-27}
μ^{03}	0.0014	3.813415×10^{-25}

Dari hasil output di atas dapat dibuat *force of mortality* pada masing-masing state. Untuk melihat bagaimana perubahan *force of mortality* dari suami dan istri seiring pertambahan usia, dibuat plot dari *force of mortality* pada masing-masing state, plot dari *force of mortality* nya sebagai berikut:



Gambar 1: plot *force of mortality* pada model markov. Dari plot tersebut dapat diamati, untuk masing-masing jenis kelamin *force of mortality* setelah kematian pasangan (plot 3) lebih tinggi dari *force of mortality* sebelum kehilangan pasangannya (plot 4) ini menandakan adanya dampak dari kehilangan pasangannya. Dari plot tersebut dapat juga dilihat *force of mortality* dari suami lebih tinggi daripada istri ini menandakan suami lebih beresiko mengalami kematian dari pada istri.

Langkah selanjutnya adalah menerapkan hasil-hasil yang telah diperoleh dalam mencari premi tunggal bersih untuk asuransi jiwa *multi life* dengan status *last survivor*. Untuk itu diberikan suatu contoh kasusnya, yaitu: Bapak Nyoman dan Ibu Made merupakan pasangan suami istri yang saat ini berusia 55 dan 52 tahun, mereka berencana membeli produk asuransi jiwa di salah satu perusahaan asuransi yang ada di kota mereka tinggal. Untuk itu, mereka datang ke perusahaan tersebut untuk meminta informasi kepada karyawan perusahaan tersebut. Mereka ingin mengetahui produk asuransi mana yang tepat untuk mereka. Karyawan perusahaan tersebut menawarkan produk asuransi jiwa berjangka *multi life* dengan status *last survivor* dengan manfaat kematian sebesar Rp. 10.000.000 dan suku bunga 6%. Hitunglah besarnya premi yang harus dibayarkan pasangan tersebut kepada perusahaan asuransi tersebut agar mendapatkan manfaat kematian tersebut?

Untuk menghitung premi tunggal bersihnya digunakan rumus berikut:

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = 1 - \delta \int_0^n e^{-\delta t} \left({}_t p_{xy}^{01} + {}_t p_{xy}^{02} + {}_t p_{xy}^{00} \right) dt$$

Dengan memasukkan nilai-nilai estimator kedalam persamaan tersebut dan dengan menggunakan integrasi numerik diperoleh

$$\bar{a}_{\overline{xy}:\overline{10}|} = 7.51753$$

Dengan demikian ,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\overline{xy}:\overline{10}|} &= 1 - \delta \bar{a}_{\overline{xy}:\overline{10}|} = 1 - 0.0582689 \times 7.51753 \\ &= 0.561962 \end{aligned}$$

Sehingga premi tunggal bersih untuk asuransi jiwa survivorship berjangka 10 tahun dengan manfaat kematian sebesar Rp. 10.000.000 adalah

$$Rp10.000.000 \left(\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{10}|} \right) = Rp5.619.620$$

Jadi besarnya premi sekali bayar yang harus dibayarkan oleh pasangan suami istri tersebut adalah sebesar Rp.5.619.620.

5. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. *Force of mortality* dari suami lebih tinggi daripada istri ini menandakan suami lebih beresiko daripada istri.
2. Terdapat ketidakbebasan antara waktu hidup antara suami dan istri dimana terjadi peningkatan *force of mortality* setelah kehilangan pasangan.
3. Premi tunggal bersih (*Net Single Premium*) dari asuransi jiwa *multi-life status last survivor* dengan pendekatan markov dapat dicari dengan rumus berikut:

$$\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = 1 - \delta \int_0^n e^{-\delta t} \left({}_t p_{xy}^{01} + {}_t p_{xy}^{02} + {}_t p_{xy}^{00} \right) dt$$

6. Pustaka

- Atkinson, K. 1993. *Elementary Numerical Analysis Second Edition*. John Wiley & Sons. Canada.
- Bain, Lee J dan Engelhardt, Max. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California : Duxbury, 1992
- Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. dan Nesbitt, C.J., 1997, *Actuarial Mathematics 2nd Edition*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.
- Fauziah, Irma.2008. *Modifikasi Angka Klaim Frasier Pada Polis Asuransi Jiwa Survivorship*. Tesis . Program Studi S2 Matematika UGM
- Ji, Min., Hardy, Mary. dan Li, Johnny Siu-Hang. 2010. *Markovian Approaches to Joint Life Mortality*. *North American Actuarial Journal*, Volume 15, number 3.
- London, Dick, 1997, *Survival Models and Their Estimation 3rd Edition*, Actex Publication, Winsted
- Norberg, R. 1989. *Actuarial Analysis of Dependent Lives*. Bulletin of the Swiss Association of Actuaries 2: 243–254.
- Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models 10th edition*. USA : Elsevier, Inc.
- Spreeuw, J., and X. Wang. 2008. *Modelling the Short-Term Dependence between Two Remaining Lifetimes*. Available at <http://www.actuaries.org.uk>
- Taylor, Howard M. dan Karlin, Samuel.1998. *An Introduction to Stochastic Modeling 3rd edition*. Academic Press, USA
- Venkataraman, P. (2002). *Applied Optimization with Matlab Programming*. John Wiley & Sons, New York.
- Waters, H. R. 1984. *An Approach to the Study of Multiple State Models*. *Journal of the Institute of Actuaries* 114: 569–580